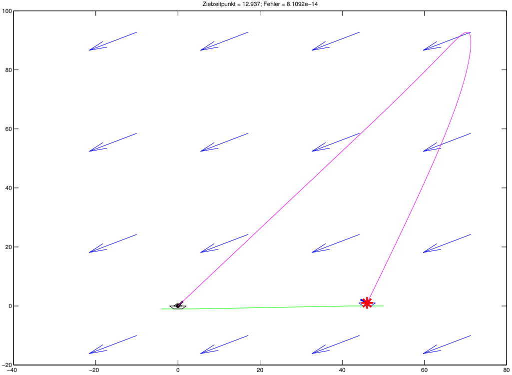
Der Wurf mit Wind

Numerische Mathematik 1
WS 2011/12

Problemstellung

Die Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ beschreibe mit $q(t)$ die Position eines Projektils zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$.



Es soll ein Ziel in den Koordinaten $q_T \in \mathbb{R}^2$ zu einem festen Zeitpunkt $T > 0$ getroffen werden, d.h. es soll gelten:

$$q(T) = q_T.$$

Die Gravitationskraft

Es bezeichne

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^2$, $m \in \mathbb{R}_{>0}$ die Masse des Projektils und $g \in \mathbb{R}_{>0}$ die (konstante) Gravitationsbeschleunigung.

Dann ist die auf das Projektil wirkende Gravitationskraft

$$F_g = -mge_2.$$

Wurf ohne Wind

In der Programmieraufgabe von Blatt 5 wurde im Wesentlichen die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} m\ddot{q}(t) &= F_g = -mge_2, \\ q(0) &= 0, \qquad \dot{q}(0) = v_0, \end{cases}$$

betrachtet.

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung und

$$\dot{q}(t) = \dot{q}(0) + \int_0^t \ddot{q}(\tau)d\tau = v_0 - \int_0^t ge_2 d\tau = v_0 - ge_2 t$$

ist dies nämlich

$$q(t) = q(0) + \int_0^t \dot{q}(\tau)d\tau = v_0 t - \frac{gt^2}{2}e_2.$$

Die Zielgleichung ohne Wind

Bei gegebenem $v_0 \in \mathbb{R}^2$ befindet sich das Projektil zum Zeitpunkt $T > 0$ also in

$$q(T) = v_0 T - \frac{gT^2}{2} e_2 \stackrel{!}{=} q_T.$$

Es beschreibe $\mathfrak{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\mathfrak{G}(v_0) = v_0 T - \frac{gT^2}{2} e_2 - q_T \stackrel{!}{=} 0,$$

die Abweichung des Projektils vom Zielpunkt (zur Zeit T).

Lösung der Gleichung

Die Lösung von

$$\mathfrak{G}(v_0) = v_0 T - \frac{gT^2}{2} e_2 - q_T \stackrel{!}{=} 0,$$

kann man mit dem Newton-Verfahren bestimmen, oder einfach durch

$$v_0 = \frac{gT}{2} e_2 + \frac{1}{T} q_T.$$

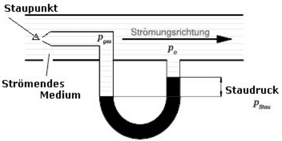
Die Realität

http://forums.spacebattles.com/showthread.php?t=155715

$\rightarrow$ `TEST_SETUP.m` (ohne Wind)

Die Strömungswiderstandskraft

Prandtl-Sonde: http://de.wikipedia.org/wiki/Prandtlsonde



Strömungswiderstandskraft: http://de.wikipedia.org/wiki/Strömungswiderstand

$$F_w = c_W A \frac{1}{2} \rho v^2$$

c_W - Strömungswiderstandskoeffizient
A - Bezugsfläche
ρ - Dichte
v - Geschwindigkeit

Vereinfachung

Hier nehmen wir an, dass

$$c_W A \frac{1}{2} = 1,$$

d.h. dass die Strömungswiderstandskraft als

$$F_w = \rho v^2$$

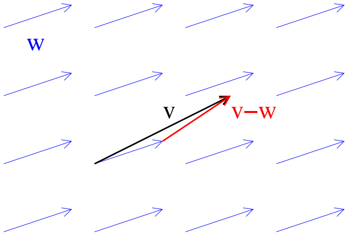
geschrieben werden kann, wobei ρ wieder die Dichte ist und

$$v \in \mathbb{R}$$

die Geschwindigkeit.

Richtung der Kraft

Der Vektor $w \in \mathbb{R}^2$ bezeichne die Windgeschwindigkeit und $v \in \mathbb{R}^2$ die Geschwindigkeit des Projektils.



Dann ist $v - w$ die *relative* Geschwindigkeit des Projektils gegenüber der umgebenden Luft.
Die Strömungswiderstandskraft wirkt dann in Richtung

$$-\frac{1}{\|v-w\|}(v-w) = \frac{w-v}{\|w-v\|}.$$

Gerichtete Kraft

Die gerichtete Strömungswiderstandskraft setzen wir daher als

$$
\begin{aligned}
F_w &= \rho\|w-v\|^2\frac{w-v}{\|w-v\|} \\
&= \rho\|w-v\|(w-v) \\
&= \rho\|w-\dot{q}\|(w-\dot{q})
\end{aligned}
$$

an.

Dies führt auf die Differentialgleichung:

$$
\begin{cases}
m\ddot{q}(t) = F_g + F_w = -mge_2 + \rho\|w-\dot{q}(t)\|\,(w-\dot{q}(t))\,, \\
q(0) = 0, \qquad \dot{q}(0) = v_0.
\end{cases}
$$

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung?

Das Modell

Wählt man die Masse $m = 1$ so erhält man

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ddot{q}(t) & = & -ge_2 + \rho \| w - \dot{q}(t) \| \left(w - \dot{q}(t) \right), \\ q(0) & = & 0, \qquad \dot{q}(0) = v_0, \end{array} \right. \tag{1}$$

die für die Programmieraufgabe zentrale Differentialgleichung.

$\rightarrow$ `func_f.m`

Lösungsfunktion

Nimmt man ferner an, dass das Anfangswertproblem (1) eindeutig lösbar ist so ist die Lösungsfunktion

$$Q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

welche jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ und jeder Startgeschwindigkeit $v_0 \in \mathbb{R}^2$ die Lösung von (1) an der Stelle t

$$Q(t, v_0) = q(t)$$

zuordnet, wohldefiniert.

Zielgleichung

Wir suchen nun eine Nullstelle der Funktion $\mathfrak{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ welche durch

$$\mathfrak{G}(v_0) := Q(T, v_0) - q_T$$

gegeben ist.

Das Newton-Verfahren:

$$v_{k+1} \quad = \quad v_k - \left(D\mathfrak{G}(v_k)\right)^{-1} \mathfrak{G}(v_k).$$

In jedem Schritt des Newton-Verfahrens muss also $\mathfrak{G}(v_k) \in \mathbb{R}^2$ und

$$D\mathfrak{G}(v_k) = \tfrac{\partial}{\partial v_k} Q(T, v_k) \in \mathbb{R}^{2,2}$$

berechnet werden

Gleichungen für Q

Aus (1) folgt für jede Startgeschwindigkeit $v_k \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} Q(t, v_k) &= -g e_2 + \rho \| w - \tfrac{d}{dt} Q(t, v_k) \| \left(w - \tfrac{d}{dt} Q(t, v_k) \right), \\
\frac{d}{dt} Q(0, v_k) &= v_k, \\
Q(0, v_k) &= 0.
\end{aligned}$$

Es bezeiche $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2,2}$ die Funktion

$$\Psi(t, v_k) := \frac{\partial}{\partial v_k} Q(t, v_k).$$

Dann ist

$$\Psi(T, v_k) = D\mathfrak{G}(v_k),$$

die gesuchte Ableitung.

Gleichungen für Ψ

Aus den Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} Q(t, v_k) &= -g e_2 + \rho \| w - \frac{d}{dt} Q(t, v_k) \| \left(w - \frac{d}{dt} Q(t, v_k) \right), \\ \frac{d}{dt} Q(0, v_k) &= v_k \\ Q(0, v_k) &= 0 \end{cases}$$

und mit der Bezeichnung $\Psi(t, v_k) := \frac{\partial}{\partial v_k} Q(t, v_k)$ folgt nun durch Ableiten nach v_k

$$\begin{aligned} \Psi(0, v_k) &= \frac{\partial}{\partial v_k} Q(0, v_k) = \frac{\partial}{\partial v_k} 0 = 0 \in \mathbb{R}^{2,2}, \\ \frac{d}{dt} \Psi(0, v_k) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_k} Q(0, v_k) = \frac{\partial}{\partial v_k} \frac{d}{dt} Q(0, v_k) = \frac{\partial}{\partial v_k} v_k = I_2, \\ \frac{d^2}{dt^2} \Psi(t, v_k) &= \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial v_k} Q(t, v_k) = \frac{\partial}{\partial v_k} \frac{d^2}{dt^2} Q(t, v_k) \overset{\text{in der Übung}}{=\cdots=} \\ & -\rho \left(\| R(t, v_k) \| I_2 + \frac{R(t, v_k) R(t, v_k)^T}{\| R(t, v_k) \|} \right) \left(\frac{d}{dt} \Psi(t, v_k) \right), \end{aligned}$$

wobei

$$R(t, v_k) := w - \frac{d}{dt} Q(t, v_k)$$

die relative Geschwindigkeit zum Wind bezeichnet.

Die Differentialgleichungen für Ψ

Mit $R(t, v_k) := w - \frac{d}{dt}Q(t, v_k)$ löst $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2,2}$ also das **Matrix-**Anfangswertproblem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d^2}{dt^2}\Psi(t, v_k) & = & -\rho \left(\|R(t, v_k)\| I_2 + \frac{R(t,v_k)R(t,v_k)^T}{\|R(t,v_k)\|} \right) \left(\frac{d}{dt}\Psi(t, v_k) \right), \\ \frac{d}{dt}\Psi(0, v_k) & = & I_2, \\ \Psi(0, v_k) & = & 0, \end{array} \right.$$

Multiplikation von rechts mit e_i, $i \in \{1, 2\}$ und die Setzung

$$p_i(t) := \Psi(t, v_k)e_i$$

liefert die Standart-Anfangswertprobleme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ddot{p}_i(t) & = & -\rho \left(\|R(t, v_k)\| I_2 + \frac{R(t,v_k)R(t,v_k)^T}{\|R(t,v_k)\|} \right) \dot{p}_i(t), \\ \dot{p}_i(0) & = & e_i, \\ p_i(0) & = & 0, \end{array} \right. \qquad (2)$$

für $i = 1, 2$.

Ein Newton-Schritt

1. Löse das Anfangswertproblem (1) mit Startgeschwindigkeit v_k. Dies liefert (Approximationen an die) Trajektorien

$$Q(t, v_k) = q(t), \qquad \frac{d}{dt} Q(t, v_k) = \dot{q}(t)$$

auf einer diskreten Teilmenge von $[0, T]$. Setze

$$\mathfrak{G}(v_k) := Q(T, v_k) - q_T.$$

2. Löse die Anfangswertprobleme (2) für $i = 1, 2$ und setze

$$\begin{aligned} D\mathfrak{G}(v_k) &= \Psi(T, v_k) = \begin{bmatrix} \Psi(T, v_k)e_1 & \Psi(T, v_k)e_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_1(T) & p_2(T) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Berechne $v_{k+1} = v_k - (D\mathfrak{G}(v_k))^{-1} \mathfrak{G}(v_k)$, ohne die Matrix explizit zu invertieren. (MATLAB: `DfrakG\frakG` - Backslash Operator)

Lösung der Anfangswertproblem

Die Anfangswertprobleme (1) und (2) sollen durch Ordnungsreduktion und dann mit dem MATLAB Kommando

$$[\mathtt{TOUT}, \mathtt{YOUT}] = \mathtt{ode45}(\mathtt{ODEFUN}, \mathtt{TSPAN}, \mathtt{Y0})$$

gelöst werden. Dabei muss `ODEFUN` ein **Funktionshandle** auf eine Funktion der Form

$$\mathtt{function}\ \mathtt{f} = \mathtt{func\_f}(\mathtt{t}, \mathtt{y})$$

sein, wobei $\mathtt{f}, \mathtt{y} \in \mathbb{R}^2$ und $\mathtt{t} \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ `berechne_projektil.m`

Interpolation

Um (2) zu integrieren muss man die Funktion

$$R(t, v_k) := w - \tfrac{d}{dt} Q(t, v_k)$$

an jeder beliebigen Stelle $t \in [0, T]$ auswerten können. Durch die Integration von (1) hat man (die Approximationen an) die Trajektorien

$$Q(t, v_k) = \ q(t), \qquad \frac{d}{dt} Q(t, v_k) = \ \dot{q}(t)$$

aber nur an endlich vielen Stellen.

Um daraus eine Approximation an $\frac{d}{dt} Q(t, v_k)$ zu jeder beliebigen Stelle $t \in [0, T]$ zu erhalten verwendent man Interpolation.

Hier reichen dabei Splines der Ordnung 1.

Startwert

Als Startwert für das Newton-Verfahren kann man die Formel von Slide 6 benutzen, d.h. die Lösung des Problems ohne Wind, oder einen festen Wert.