Die Wärmeleitungsgleichung und die Wellengleichung

Numerische Mathematik 1
WS 2011/12

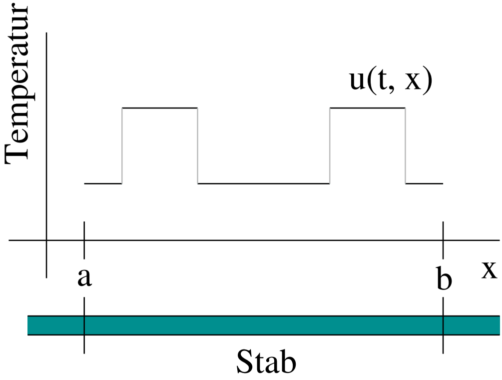
Nicht Klausurrelevant

Wärmeverteilung

Die Funktion

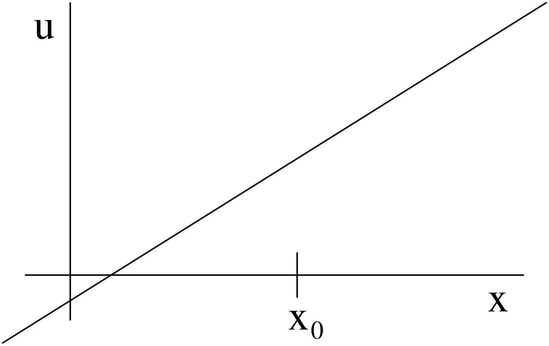
$$u : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}$$

beschreibe durch $u(t, x)$ die Temperatur zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in [a, b]$ eines sehr dünnen Stabs.



Dynamik der Wärmeverteilung (1/3)

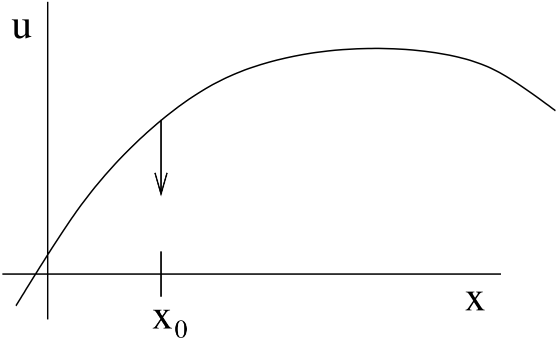
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x_0) = 0$$



$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} u(t, x_0) = 0$$

Dynamik der Wärmeverteilung (2/3)

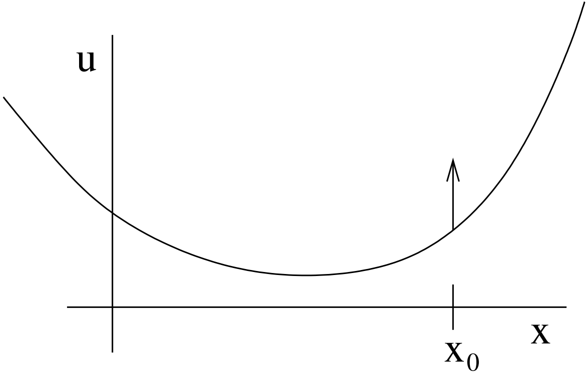
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x_0) < 0$$



$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} u(t, x_0) < 0$$

Dynamik der Wärmeverteilung (3/3)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x_0) > 0$$



$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} u(t, x_0) > 0$$

Die Wärmeleitungsgleichung in 1D

Die Funktion $u : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Lösung der (zeitabhängigen) Wärmeleitungsgleichung, falls

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x)}_{=:\Delta u(t,x)} + \underbrace{G(t, x)}_{\text{Externe Wärmequellen}} .$$

Anfangswärmeverteilung:

$$u(0, x) = u_0(x) \qquad \text{für } x \in [a, b].$$

1. endweder (homogene) Dirichlet-Randbedingungen:

$$u(t, a) = 0, \quad u(t, b) = 0 \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

2. oder (homogene) Neumann-Randbedingungen:

$$-\frac{\partial}{\partial x} u(t, a) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} u(t, b) = 0 \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Diskretisierung im Ort

Für $k = 0, 1, \dots, N$ sei

$$x_k = a + k\frac{b-a}{N},$$

eine äquidistante Diskretisierung des Intervals $[a, b]$ (auch genannt **Gitter**) mit der Feinheit

$$h := \frac{b-a}{N}.$$

Auf diesem Gitter soll nun die Lösung

$$u : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}$$

durch endlich-viele Funktionen $y_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ approximiert werden, d.h. es soll gelten

$$y_k(t) \approx u(t, x_k),$$

für $k = 0, \dots, N$.

Finite Differenzen

In der Hausaufgabe 1 von Blatt 3 wurde gezeigt, dass

$$\begin{aligned}
\Delta u(t, x_k) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x_k) \\
&\approx \frac{1}{h^2}\Big(u(t, x_k + h) - 2u(t, x_k) + u(t, x_k - h)\Big) \\
&= \frac{1}{h^2}\Big(u(t, x_{k+1}) - 2u(t, x_k) + u(t, x_{k-1})\Big) \\
&\approx \frac{1}{h^2}\Big(y_{k+1}(t) - 2y_k(t) + y_{k-1}(t)\Big),
\end{aligned}$$

für $k = 0, \ldots, N$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} y_k(t) &\approx \frac{\partial}{\partial t} u(t, x_k) = \Delta u(t, x_k) + \underbrace{G(t, x_k)}_{=: g_k(t)} \\
&\approx \frac{1}{h^2}\Big(y_{k+1}(t) - 2y_k(t) + y_{k-1}(t)\Big) + g_k(t).
\end{aligned}$$

Laplace als Matrix

Ähnlich Hausaufgabe 1 von Blatt 3 kann man diese Gleichungen

$$\frac{d}{dt} y_k(t) = \frac{1}{h^2}\Big(y_{k+1}(t) - 2y_k(t) + y_{k-1}(t)\Big) + g_k(t).$$

für $k = 1, \dots, N-1$ umschreiben in Matrixform als

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{N-2}(t) \\ y_{N-1}(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{h^2}\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{=:A}\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{N-2}(t) \\ y_{N-1}(t) \end{bmatrix}}_{=:y(t)} + \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} y_0(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_N(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_{N-2}(t) \\ g_{N-1}(t) \end{bmatrix}}_{=:g(t)}$$

wobei $y, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N-1}$.

Anfangswertproblem

Wählt man die (homogenen) Dirichlet-Randwertbedingungen

$$y_0(t) = u(t, a) = 0, \qquad y_N(t) = u(t, b) = 0,$$

so erhält man daraus eine (gewöhnliche) Differentialgleichung der Form

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + g(t).$$

$\rightarrow$ `discretize_laplace_1d.m`

Für die Anfangsbedingung ergibt sich

$$y(0) \;=\; \begin{bmatrix} y_1(0) \\ \vdots \\ y_{N-1}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0, x_1) \\ \vdots \\ u(0, x_{N-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0(x_1) \\ \vdots \\ u_0(x_{N-1}) \end{bmatrix} =: y_0.$$

$\rightarrow$ `discretize_function_1d.m`

Zusammenfassung

Wir erhalten ein Anfangswertproblem der Form

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= Ay(t) + g(t), \\ y(0) &= y_0, \end{cases}$$

wobei $y, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N-1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{N-1}$, und $A \in \mathbb{R}^{N-1,N-1}$.

```
>> HEAT_WAVE_1D( 51, 'HEAT', 'dirichlet')
```

Neumann Randbedingungen

Will man aber Neumann- (statt Dirichlet-) Randbedingungen einführen, d.h.

$$-\frac{\partial}{\partial x}u(t,a) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}u(t,b) = 0 \qquad \text{für } t \in \mathbb{R},$$

so kann man die Approximation

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial x}u(t,b) &= \frac{\partial}{\partial x}u(t,x_N) \approx \frac{1}{h}\big(u(t,x_N) - u(t,x_{N-1})\big) \\ &\approx \frac{1}{h}\big(y_N(t) - y_{N-1}(t)\big) \end{aligned}$$

durchführen (analog für $\frac{\partial}{\partial x}u(t,a)$). Die liefert

$$y_N(t) = y_{N-1}(t), \qquad y_0(t) = y_1(t).$$

Laplace-Operator mit Neumann RB

Mit diesem Gleichungen,

$$y_N(t) = y_{N-1}(t), \qquad y_0(t) = y_1(t).$$

wird aus dem ursprünglichen System

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{N-2}(t) \\ y_{N-1}(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{N-2}(t) \\ y_{N-1}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} y_0(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_{N-2}(t) \\ g_{N-1}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{N-2}(t) \\ y_{N-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_{N-2}(t) \\ g_{N-1}(t) \end{bmatrix}$$

```
>> HEAT_WAVE_1D(10, 'HEAT', 'neumann')
```

Ortsdiskrete Wärmeleitungsgleichung

Die partielle Differentialgleichung für $u, G : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) &= \Delta u(t,x) + G(t,x), \\ u(0,x) &= u_0(x), \end{cases}$$

mit Dirichlet- oder Neumann-Randwerten kann durch ein Anfangswertproblem der Form

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= Ay(t) + g(t), \\ y(0) &= y_0, \end{cases}$$

approximiert werden, wobei $y, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N-1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{N-1}$, $A \in \mathbb{R}^{N-1,N-1}$ und für die Komponenten y_k und g_k von y und g gilt

$$y_k(t) \approx u(t, x_k), \qquad g_k(t) = g(t, x_k),$$

auf dem Gitter

$$x_k = a + k\frac{b-a}{N}.$$

```
>> HEAT_WAVE_1D(10, 'HEAT', 'dirichlet')
```

oogle

maxwell's equations tattoo

ne

Ungefähr 7.840 Ergebnisse (0,44 Sekunden)

SafeSearch -

ing

rgebnisse
Thema

rößen

ramm
r als...
u...

arben
rz-Weiß

ypen

Die Maxwell'schen Gleichungen

Im Vakuum erfüllen

$$\begin{aligned} E :& \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 && \text{das Elektrische Feld und} \\ H :& \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 && \text{das Magnetische Feld} \end{aligned}$$

die *Maxwell'schen Gleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t}(t,x) &= -\frac{1}{\mu} \nabla \times E(t,x) \\ \frac{\partial E}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{\epsilon} \nabla \times H(t,x) \end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^3$ wobei

$$\epsilon = \frac{10^7}{4\pi \cdot 299\,792\,458^2} \, \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{s}^4}{\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^3}, \qquad \mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \, \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$$

die elektrische und die magnetische Feldkonstante sind.

Vektoranalysis

Aus den Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon}\nabla \times H \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu}\nabla \times E \end{aligned}$$

erhält

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}E = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\epsilon}\nabla \times H = \frac{1}{\epsilon}\nabla \times \left(-\frac{1}{\mu}\nabla \times E\right) \\ &= -\frac{1}{\epsilon\mu}\nabla \times \nabla \times E \\ &\overset{\text{kompliziert}}{=} \frac{1}{\epsilon\mu}\Delta E - \frac{1}{\epsilon\mu}\nabla(\nabla \cdot E) = \frac{1}{\epsilon\mu}\Delta E - \frac{1}{\epsilon\mu}\nabla\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right), \end{aligned}$$

wobei $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die elektrische Ladung und

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet.

Starke Vereinfachung: 1D

Die Funktion $u : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Lösung der (zeitabhängigen) Wellengleichung, falls

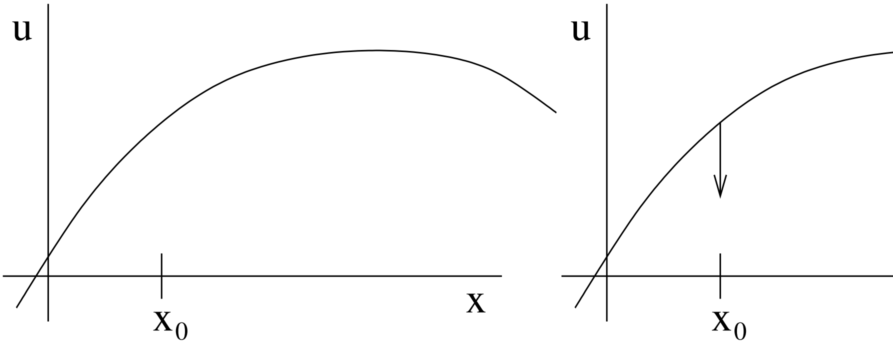
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = c^2 \underbrace{\Delta u(t, x)}_{:= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)},$$

bzw.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \Delta u(t, x).$$

Dynamik der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x_0) < 0$$



$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x_0) < 0$$

Masse

Newton's zweites Gesetz

$$\text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} = \text{Kraft}$$

Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \Delta u(t, x).$$

Die Konstante $\frac{1}{c^2}$ nimmt also die Rolle der Masse ein

Einstein:

$$E = mc^2$$

Normierung

Nimmt man an, dass $c = 1$ ist und führt noch externe Kräfte $G : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}$ ein so erhält man die *skalare Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \Delta u(t, x) + G(t, x),$$

mit der Unbekannten $u : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}$.

Anfangszustand und Anfangsgeschwindigkeit:

$$u(0, x) = u_0(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) \ = \ v_0(x), \qquad \text{für } x \in [a, b].$$

Wieder sind (homogene) Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen möglich

Ortsdiskretisierung

Aus der partiellen Differentialgleichung für $u, G : \mathbb{R} \times [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) & = & \Delta u(t,x) + G(t,x), \\ u(0,x) & = & u_0(x), \qquad \text{für } x \in [a,b], \\ \frac{\partial}{\partial t} u(0,x) & = & v_0(x), \qquad \text{für } x \in [a,b], \end{array} \right.$$

wird wie vorher eine Anfangswertproblem mit $y, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N-1}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ddot{y}(t) & = & Ay(t) + g(t), \\ y(0) & = & y_0, \\ \frac{\partial}{\partial t} y(0) & = & v_0, . \end{array} \right.$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{N-1,N-1}$ und $y_0, v_0 \in \mathbb{R}^{N-1}$.

```
>> HEAT_WAVE_1D( 201, 'WAVE', 'dirichlet')
```