Integration eines Massepunktes im konservativen Kraftfeld

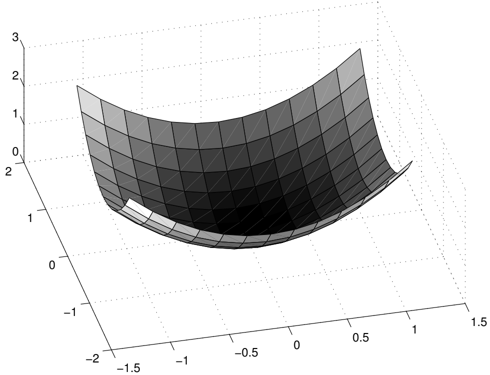
Numerische Mathematik 1
WS 2011/12

Das Potential

Es sei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die im folgenden *Potential* genannt wird.

Beispiel ($n = 2$):

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$



Das Kraftfeld

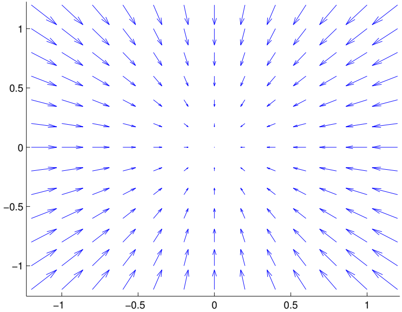
Ist $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Potential so nennt man das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad F(x) := -\nabla V(x) := -\left(DV(x)\right)^T$$

auch das zu V gehörende *(konservative) Kraftfeld*.

Beispiel ($n = 2$):

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad F(x_1, x_2) = (-2x_1, -2x_2)$$



Der Massepunkt

Es bezeichne die Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$q(t)$$

die Position eines Massepunktes zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ und

$$m \in \mathbb{R}$$

seine Masse.

Newton’s zweites Gesetz

Newton:

Mutationem motuſ proportionalem eſſe vi motrici impreſſae, et fieri ſecundum lineam rectam qua viſ illa imprimitur.

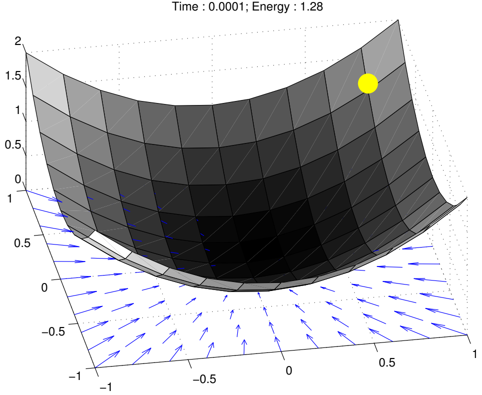
Euler:

Kraft(feld) = Masse $\times$ Beschleunigung

d.h.

$$m\ddot{q}(t) = F(q(t))$$

Der Plot



Eigentlich lebt der Massepunkt $\bullet$ in diesem Beispiel in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

$\rightarrow$ `POTENTIAL('pot_norm2.mat')`

Die Energie

Sei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das Potential des Vektorfelds $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$F(x) = -\nabla V(x) = -(DV(x))^T.$$

Sei $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig diferenzierbare Lösung von

$$m\ddot{q}(t) = F(q(t)).$$

Man kann nun die Funktion $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ durch

$$E(t) := \frac{m}{2} \|\dot{q}(t)\|^2 + V(q(t)) = \frac{m}{2}\dot{q}(t)^T\dot{q}(t) + V(q(t))$$

definieren und *Energie* nennen. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= \frac{m}{2}\dot{q}(t)^T\ddot{q}(t) + \ddot{q}(t)^T\dot{q}(t) + DV(q(t))\dot{q}(t) \\ &= m\dot{q}(t)^T\ddot{q}(t) - F(q(t))^T\dot{q}(t) = 0.\end{aligned}$$

Folgerung: Energieerhaltung

Die Bewegung eines Massepunktes q mit Masse m im konservativen Kraftfeld F mit Potential V ist also *energieerhaltend*, wenn man die Energie durch

$$E(t) := \frac{m}{2} \|\dot{q}(t)\|^2 + V(q(t)),$$

mißt.