Der Algorithmus der LR-Zerlegung

Numerische Mathematik 1
WS 2011/12

LR-Zerlegung

Die Matrizen $L, R \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißen **LR-Zerlegung** von $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, falls

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ * & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \dots & * & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} * & \dots & \dots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & * \end{bmatrix}$$

und

$$A = LR.$$

Bei partieller Pivotisierung erhält man noch eine Permutationsmatrix P, so dass

$$PA = LR.$$

Aufgabe

Sei

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die LR-Zerlegung mit partieller Pivotisierung von A und benutzen Sie diese um das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

zu lösen!

Formaler Ansatz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

<u>Schritt 1.a:</u> *Pivotisierung*
Mit

$$P_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist

$$P_1 A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Formaler Ansatz

$$P_1 A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

<u>Schritt 1.b:</u> *Elimination*

Mit

$$M_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist

$$M_1 P_1 A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 0 & 4 + (-\frac{1}{2}) \cdot (9) & -2 + (-\frac{1}{2}) \cdot (-3) \\ 0 & -3 + (\frac{1}{2}) \cdot (9) & 7 + (\frac{1}{2}) \cdot (-3) \end{bmatrix}.$$

Formaler Ansatz

$$M_1 P_1 A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

Schritt 2.a: *Pivotisierung*
Mit

$$P_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ist

$$P_2 M_1 P_1 A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Formaler Ansatz

$$P_2 M_1 P_1 A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

<u>Schritt 2.b:</u> *Elimination*

Mit

$$M_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

ist

$$M_2 P_2 M_1 P_1 A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{11}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Formaler Ansatz

Damit ist

$$M_2 P_2 M_1 P_1 A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} =: R$$

eine obere Dreiecksmatrix.

Letzter Schritt.a: *Rekonstruktion R, P*
Da $P_2 P_2 = I$ ist, erhält man

$$R = \underbrace{M_2}_{=:\hat{M}_2} \underbrace{P_2 M_1 P_2}_{=:\hat{M}_1} \underbrace{P_2 P_1}_{=:P} A$$

wobei

$$\hat{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Formaler Ansatz

$$R = \hat{M}_2 \hat{M}_1 PA$$

<u>Letzter Schritt.b:</u> *Rekonstruktion L*
Wählt man noch L so, dass

$$L^{-1} := \hat{M}_2 \hat{M}_1$$

so ist

$$L = \hat{M}_1^{-1} \hat{M}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

und wir haben die LR-Zerlegung

$$LR = PA.$$

Formaler Ansatz

Um das System $Ax = b$ zu lösen, löst man nun das äquivalente System

$$\underbrace{L\,Rx}_{=:y} = PAx = Pb = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix},$$

und lösen dann erst

$$Ly = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

und dann

$$Rx = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} \qquad \boxed{\Rightarrow x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

Algorithmischer Ansatz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & I \\ 4 & 9 & -3 & II \\ -2 & -3 & 7 & III \end{array}\right] \xrightarrow{1.a} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & -3 & II \\ 2 & 4 & -2 & I \\ -2 & -3 & 7 & III \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{1.b} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & -3 & II \\ \frac{1}{2} & 4-\frac{9}{2} & -2+\frac{3}{2} & I \\ -\frac{1}{2} & -3+\frac{9}{2} & 7-\frac{3}{2} & III \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & -3 & II \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & I \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & III \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2.a} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & -3 & II \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & III \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & I \end{array}\right] \xrightarrow{2.b} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & -3 & II \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & III \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2}+\frac{11}{6} & I \end{array}\right]$$

Achtung: Die Einträge unten links mittauschen, bei der Pivotisierung!

Algorithmischer Ansatz

Aus der Form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & -3 & II \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & III \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & I \end{array}\right]$$

kann man nun die Matrizen

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(wie oben im formalen Ansatz) herauslesen.

Implementatorische Details

Hat man den zu P gehörenden Permutationsvekor

```
pi = [ 2; 3; 1 ]
```

in Matlab gespeichert, so kann man Pb durch

```
b(pi)
```

ausrechnen.

Implementatorische Details

Dreieckssysteme kann man **in-place** lösen, d.h. man kann die rechte Seite direkt mit der Lösung überschreiben.

Um zum Beispiel

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

zu lösen, kann man die Folge

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ \mathbf{4} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 9 \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix} =: z$$

durchlaufen.

Grundgerüst: LR-Zerlegung

```
function fact = lr_zerlegung(A)
n = size(A, 1);

pi = 1:1:n;

for i=1:n-1
    % Schritt i.a : Pivotisierung

    % Schritt i.b : Elimination

end

fact.LR = A; fact.pi = pi; fact.n  = n;
```

Grundgerüst: Lösen

```
function x = vor_rueck(fact, b)
LR = fact.LR; pi = fact.pi; n  = fact.n;

b = b(pi); % Berechne Pb

% Loese Ly = Pb
for i=1:n
   b(i) = ...; % i-ten Eintrag von y berechnen
end

% Loese Rx = y
for i=n:-1:1
   b(i) = ...; % i-ten Eintrag von x berechnen
end

x=b;
```