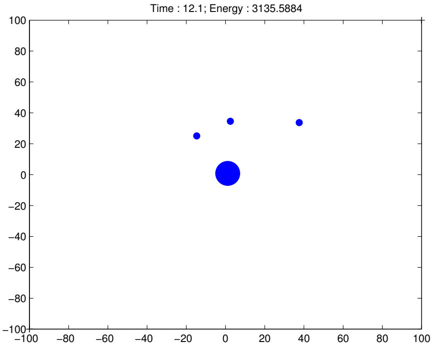
Das n-Körper Problem

Numerische Mathematik 1
WS 2011/12

Ziel

Beschreibung der Bewegung von $n \in \mathbb{N}$ Punktmassen im luftleeren Raum (hier $\mathbb{R}^2$), wobei jede Masse auf jede andere Masse eine gewisse Gravitationskraft ausübt.



Notation

Für $i = 1, \ldots, n$ beschreibt die Funktion $q_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$q_i(t)$$

die Position des i-ten Körpers zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ und

$$m_i \in \mathbb{R}$$

seine Masse.

Newton’s zweites Gesetz

Newton:

Mutationem motuſ proportionalem eſſe vi motrici impreſſae, et fieri ſecundum lineam rectam qua viſ illa imprimitur.

Euler:

Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung

d.h.

$$m_i \ddot{q}_i(t) = F_i(q_1(t), \ldots, q_n(t))$$

Gravitation bei zwei Körpern

Hat man zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2, die sich im Abstand $r > 0$ zueinander Befinden, so Beträgt die Gravitationskraft

$$G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

wobei

$$G \approx 6.67384 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

die *Gravitationskonstante* ist.

Gravitation bei zwei Körpern im $\mathbb{R}^2$

Befinden sich die Körper in den Punkten $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^2$ (mit $q_1 \neq q_2$) so ist die gerichtete Kraft, die Körper 1 auf Körper 2 ausübt

$$\begin{aligned} F_{12} &= G\frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \overrightarrow{q_2 q_1} \\ &= G\frac{m_1 m_2}{\|q_1 - q_2\|^2} \frac{q_1 - q_2}{\|q_1 - q_2\|} \\ &= G m_1 m_2 \frac{q_1 - q_2}{\|q_1 - q_2\|^3}, \end{aligned}$$

und die von Körper 2 auf Körper 1 ausgeübte Kraft

$$\begin{aligned} F_{21} &= -F_{12} \\ &= G m_1 m_2 \frac{q_2 - q_1}{\|q_2 - q_1\|^3}. \end{aligned}$$

Gravitation bei mehreren Körpern

Angenommen, es befinden sich Körper mit den Massen $m_1, \ldots, m_n$ in den Punkten $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^2$. Dann wird also auf den Körper $i \in \{1, \ldots, n\}$ insgesamt die Kraft

$$
\begin{aligned}
F_i &:= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} F_{ji} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} G m_i m_j \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|^3} \\
&= G m_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} m_j \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|^3}
\end{aligned}
$$

ausgeübt.

Bewegungsgleichung

Berücksichtigt man noch die Zeitabhängigkeit der Positionen

$$q_i = q_i(t)$$

erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} m_i \ddot{q}_i(t) &= F_i(q_1(t), \ldots, q_n(t)) \\ &= G m_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} m_j \frac{q_j(t) - q_i(t)}{\|q_j(t) - q_i(t)\|^3}. \end{aligned}$$

Die Bewegung erfüllt also die Differentialgleichung

$$\ddot{q}_i(t) = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} m_j \frac{q_j(t) - q_i(t)}{\|q_j(t) - q_i(t)\|^3},$$

für $i = 1, \ldots, n$.

System zweiter Ordnung

Man kann nun $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$ durch

$$q := \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

und die Funktion $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ durch

$$F(q) := \begin{bmatrix} F_1(q) \\ \vdots \\ F_n(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \sum_{j \neq 1} m_j \frac{q_j - q_1}{\|q_j - q_1\|^3} \\ \vdots \\ G \sum_{j \neq n} m_j \frac{q_j - q_n}{\|q_j - q_n\|^3} \end{bmatrix}$$

definieren. Dann erfüllt die Bewegung der Körper

$$\ddot{q}(t) = F(q(t)),$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Existenz? Eindeutigkeit?

Bezeichnung für die Ableitung

Im folgenden seien durch $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$v_i(t) := \dot{q}_i(t),$$

für $t \in \mathbb{R}$ und $i \in \{0, \ldots, n\}$ die Geschwindigkeiten der Körper bezeichnet.

Analog zu q bezeichne $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$ nun

$$v := \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Ordnungsreduktion

Dann gilt

$$\begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ F(q(t)) \end{bmatrix}.$$

Definiert man die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2 \cdot 2n} \to \mathbb{R}^{2 \cdot 2n}$ durch

$$f\left(t, \begin{bmatrix} q \\ v \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} v \\ F(q) \end{bmatrix}$$

und benutzt die Bezeichnung $y := \begin{bmatrix} q \\ v \end{bmatrix}$ so erhält man die

äquivalente Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

für $t \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ `n_body_func.m`

Explizites Euler-Verfahren

Auf äquidistantem Gitter

$$t_i := i \cdot h, \qquad \text{für } i = 0, 1, \ldots$$

mit der Feinheit $h > 0$ will man eine Approximation

$$y_i \approx y(t_i)$$

berechnen. Wegen

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)) \approx f(t_i, y_i)$$

kann man das Verfahren

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$$

mit einem Startwert y_0 probieren.

Implizites Euler-Verfahren

Auf äquidistantem Gitter

$$t_i := i \cdot h, \qquad \text{für } i = 0, 1, \dots$$

mit der Feinheit $h > 0$ will man eine Approximation

$$y_i \approx y(t_i)$$

berechnen. Wegen

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx y'(t_{i+1}) = f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \approx f(t_{i+1}, y_{i+1})$$

kann man versuchen y_{i+1} so zu bestimmen, dass gilt

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_{i+1}, y_{i+1}),$$

ausgehend von einem Startwert y_0.

Implizites Euler-Verfahren

Um y_{i+1} ausgehen von y_i zu berechnen muss man also die nicht-lineare Gleichung

$$\begin{aligned} z &= y_i + h \cdot f(t_{i+1}, z), \\ \Leftrightarrow \qquad 0 = g(z) &:= y_i + h \cdot f(t_{i+1}, z) - z \end{aligned}$$

nach $z^* = y_{i+1}$ lösen.

Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von g:

$$z_{k+1} = z_k + (Dg(z_k))^{-1} g(z_k)$$

mit einer Startnäherung z_0 konvergiert hoffentlich gegen $z^* = y_{i+1}$. Die Ableitung von g ist dabei

$$Dg(z) := h \cdot D_y f(t_{i+1}, z) - I.$$

$\rightarrow$ `int_impeuler.m`

Die Ableitung von f

Oben wurde $f : \mathbb{R}^{2 \cdot 2n} \to \mathbb{R}^{2 \cdot 2n}$ durch

$$f\left(\begin{bmatrix} q \\ v \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} v \\ F(q) \end{bmatrix}$$

definiert.

Daher hat die Ableitung die Form

$$Df\left(\begin{bmatrix} q \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ DF(q) & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Ableitung von $DF(q)$ ist etwas komplizierter. $\to$ HA

$\to$ `n_body_diff.m`