Die Poisson-Gleichung in 2D

Numerische Mathematik 1
WS 2011/12

Motivation

Bestimmte physikalische Probleme, wie z.B.

- Bestimmung des elektrostatischen Potentials u bei gegebener Ladungsdichte f
- Bestimmung des Gravitationspotentials u bei gegebener Massendichte f
- Bestimmung der Temperaturverteilung u im stationären Zustand bei gegebener Verteilung von Wärmequellen f

führen auf die **Poisson-Gleichung**

$$\Delta u(x) = -f(x).$$

Erklärung

Sei im folgenden

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes 2D-Gebiet mit glattem Rand
- $u : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar
- $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar

Dann ist der 2D-Laplace-Operator definiert als

$$\Delta u(x_1, x_2) := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2),$$

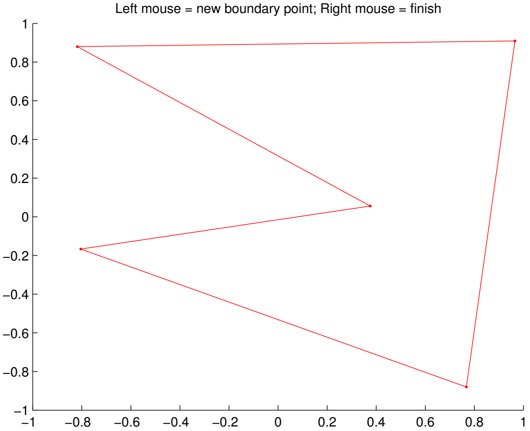
und die Gleichung

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2), & \text{für } (x_1, x_2) \in \Omega \\ u(x_1, x_2) = 0, & \text{für } (x_1, x_2) \in \partial\Omega \end{cases}$$

ist "lösbar" [Evans, Partial Differential Equations].

Das Gebiet

Sei nun ein festes Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^2$ gegeben:

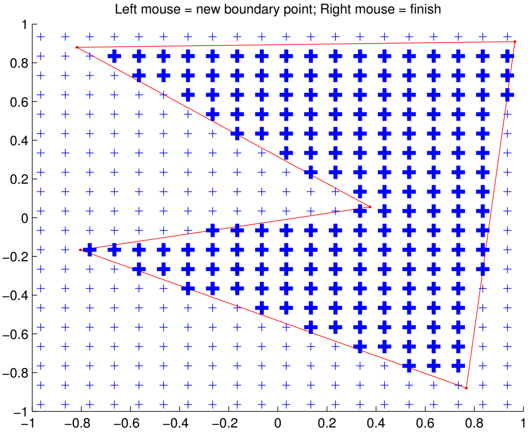


Das Gitter

Sei $h \in \mathbb{R}$ die Feinheit der Diskretisierung und

$$\mathcal{G}_h = \{(kh, \ell h) \mid k, \ell \in \mathbb{Z}\} \cap \Omega$$

das entsprechende Gitter.



Die Approximation

Wir wollen die Lösung u auf dem Gitter $\mathcal{G}_h$ approximieren, d.h. wir suchen

$$U_{k,\ell} \approx u(kh, \ell h),$$

für all $(kh, \ell h) \in \mathcal{G}_h$.

Die Diskretisierung

Für genügend glattes $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und kleines $h > 0$ ist

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}.$$

Die Diskretisierung

Für genügend glattes $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und kleines $h > 0$ ist

$$\begin{aligned}
-f(x_1, x_2) &= \Delta u(x_1, x_2) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \\
&\approx \frac{u(x_1 + h, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1 - h, x_2)}{h^2} \\
&+ \frac{u(x_1, x_2 + h) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2 - h)}{h^2}
\end{aligned}$$

Die Diskretisierung

Für $(x_1, x_2) = (kh, \ell h) \in \mathcal{G}_h$ ist also

$$\begin{aligned}
-f(kh, \ell h) &= \Delta u(kh, \ell h) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(kh, \ell h) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(kh, \ell h) \\
&\approx \frac{u(kh+h, \ell h) - 2u(kh, \ell h) + u(kh-h, \ell h)}{h^2} \\
&+ \frac{u(kh, \ell h + h) - 2u(kh, \ell h) + u(kh, \ell h - h)}{h^2}
\end{aligned}$$

Die Diskretisierung

Für $(x_1, x_2) = (kh, \ell h) \in \mathcal{G}_h$ ist also

$$\begin{aligned}
-f(kh,\ell h) &= \Delta u(kh,\ell h) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(kh,\ell h) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(kh,\ell h) \\
&\approx \frac{u(kh+h,\ell h) - 2u(kh,\ell h) + u(kh-h,\ell h)}{h^2} \\
&+ \frac{u(kh,\ell h+h) - 2u(kh,\ell h) + u(kh,\ell h-h)}{h^2} \\
&= \frac{U_{k+1,\ell} + U_{k,\ell+1} - 4U_{k,\ell} + U_{k-1,\ell} + U_{k,\ell-1}}{h^2}
\end{aligned}$$

Die Diskretisierung

Setzt man $F_{k,\ell} := f(kh, \ell h)$ für $(kh, \ell h) \in \mathcal{G}_h$ so erhält man die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} -F_{k,\ell} &= \frac{U_{k+1,\ell} + U_{k,\ell+1} - 4U_{k,\ell} + U_{k-1,\ell} + U_{k,\ell-1}}{h^2} \\ &= \frac{1}{h^2}U_{k+1,\ell} + \frac{1}{h^2}U_{k,\ell+1} - \frac{4}{h^2}U_{k,\ell} + \frac{1}{h^2}U_{k-1,\ell} + \frac{1}{h^2}U_{k,\ell-1}. \end{aligned}$$

Die Diskretisierung

Interpretiert man in

$$-F_{k,\ell} = \frac{1}{h^2} U_{k+1,\ell} + \frac{1}{h^2} U_{k,\ell+1} - \frac{4}{h^2} U_{k,\ell} + \frac{1}{h^2} U_{k-1,\ell} + \frac{1}{h^2} U_{k,\ell-1},$$

1. die roten Einträge als die Koeffizient (d.h. Einträge der Matrix A)
2. die grünen Einträge als die Inhomogenität (d.h. Einträge von b)
3. die hellblauen Einträge als die Unbekannten (d.h. Einträge von x)

so hat man ein lineares Gleichungssystem der Form

$$Ax = b,$$

wobei A sparse (=dünn besetzt) ist.

Andere Anwendungen

Anderer Ansatz: Finite Elemente Methode (FEM)

1. Vibrationsanalyse von Fahrzeugen
2. Strömungsmechanik
3. Analyse von Antennen und Radar
4. ...