Übung 10: Differentialgleichungen

Satz: (Kettenregel)

Seien U, V, W normierte Vektorräume und $f: V \to W$, $g: U \to V$ differenzierbare Abbildungen auf diesen. Dann ist auch

$(f \circ g): U \to W$ differenzierbar mit

$$(*) \quad D(f \circ g)(x)[h] = Df(g(x))\left[Dg(x)[h]\right]$$

für alle $x, h \in U$.

ohne Beweis.

Sind $U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$, $W = \mathbb{R}^l$ so kann man $(*)$ auch schreiben als

$$(\square) \quad \underbrace{D(f \circ g)(x)}_{\in \mathbb{R}^{l,n}} = \underbrace{Df(g(x))}_{\in \mathbb{R}^{l,m}} \underbrace{Dg(x)}_{\in \mathbb{R}^{m,n}}.$$

Dann bezeichnet (z.B.)

$$Dg(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

die Matrix der partiellen Ableitungen von g.

Beispiel: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = \|x\| \cdot x$.

Dann ist für $i,j \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\|x\| \cdot x_i\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\|x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x_i\right)$$

$$= \begin{cases} \left(\|x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_i} + \left(\frac{1}{2}\left(\|x\|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_i\right) \cdot x_i & i = j \\ x_i \cdot \frac{1}{2}\left(\|x\|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_j & i \neq j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \|x\| + \frac{x_i^2}{\|x\|} & i = j \\ \frac{x_i \; x_j}{\|x\|} & i \neq j \end{cases}$$

$$= \|x\| \cdot \underline{I}_n + \frac{x \cdot x^T}{\|x\|}$$

Sei ferner $Q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Es bezeichne $Q(t,v)$ die Auswertung von Q und es sei $\psi(t,v) := D_v \, Q(t,v) = \frac{\partial}{\partial v} Q(t,v) \in \mathbb{R}^{n,n}$

die Ableitung nach der zweiten Komponente.

Setze $g_t(v) := w - \frac{d}{dt} Q(t,v)$, wobei

$w \in \mathbb{R}^n$ konstant ist. Dann ist

$$D g_t(v) = -D_v \frac{d}{dt} Q(t,v) \underset{\text{Fubini}}{=} -\frac{d}{dt} D_v Q(t,v)$$

$$= -\frac{d}{dt}\psi(t,v)$$

und somit wegen der Kettenregel

$$D_v\left(\left\|w - \frac{d}{dt}Q(t,v)\right\|\left(w - \frac{d}{dt}Q(t,v)\right)\right)$$

$$= D(f \circ g_t)(v) = Df(g_t(v)) \cdot Dg_t(v)$$

$$= \left(\|g_t(v)\| \cdot I_n + \frac{g_t(v)\, g_t(v)^T}{\|g_t(v)\|}\right)\left(-\frac{d}{dt}\psi(t,v)\right)$$

(in den Slides $g_t(v) = R(t,v)$).

Konsistenzordnung bei Differentialgleichungen

Bezeichnungen: Sind $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ so schreiben wir

$$(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

Sei nun $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbare Lösung von

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)).$$

Setze $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ durch

$$g(t) := (t, y(t)) =: \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} g_1(t) \\ \hline g_2(t) \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} 1 \\ n \end{array}. \quad g_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; g_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$g_1(t) = t, \quad g_2(t) = y(t)$$

Dann ist

$$\ddot{y}(t) = \frac{d}{dt}\dot{y}(t) = \frac{d}{dt} f(t, y(t)) \qquad f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$= \frac{d}{dt}(f \circ g)(t)$$

$$= \underbrace{Df(g(t))}_{\mathbb{R}^{n,n+1}} \cdot \underbrace{Dg(t)}_{\mathbb{R}^{n+1,1}}$$

$$= \left[\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}(g(t))}_{\mathbb{R}^{n,1}}, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(g(t))}_{\mathbb{R}^{n,n}}\right] \underbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{\frac{\partial g_1}{\partial t}(t)}^{\mathbb{R}^{1,1}} \\ \overbrace{\frac{\partial g_2}{\partial t}(t)}^{\mathbb{R}^{n,1}} \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} \frac{\partial t}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \left[\dot{y}(t)\right].$$

Damit folgt (in "Tensor-Schreibweise") und unter Benutzung von

$\cancel{\dddot{y}(t)}$

$$f_t := f_t(t, y(t)) := \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t))$$

$$f_y := f_y(t, y(t)) := \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$$

$$\vdots$$

$$y := y(t), \quad \dot{y} = \dot{y}(t), \ldots$$

dass

Kettenregel:

$$(f\circ g)'(x)[h] = f'(g(x))\left[g'(x)[h]\right]$$

Produktregel:

$$\Big(f(x)[h(x)]\Big)'[k] = f'(x)[h(x), k] + f(x)\left[h'(x)[k]\right]$$
$$= \Big(f'(x)[k]\Big)[h(x)] + f(x)\left[h'(x)[k]\right]$$

Kombiniert:

$$\Big(f(g(x))[h(x)]\Big)'[k]$$

$$= (f\circ g)'(x)[h(x), k] + (f\circ g)(x)\left[h'(x)[k]\right]$$

$$= f'(g(x))\left[g'(x)[k], h(x)\right] + f(g(x))\left[h'(x)[k]\right]$$

$$= \Big((f\circ g)'(x)[k]\Big)[h(x)] + (f\circ g)(x)\left[h'(x)[k]\right]$$

$$= \Big(f'(g(x))\left[g'(x)[k]\right]\Big)[h(x)] + f(g(x))\left[h'(x)[k]\right] \quad (\Delta)$$

Beweis Produktregel: zu zeigen ist

$$o(\|k\|) \overset{!}{=} \Big\| f(x+k)[h(x+k)] - f(x)[h(x)] - \big(f'(x)[k, h(x)] + f(x)[h'(x)[k]] \big) \Big\|$$

2 mal 0 addieren

$$= \Big\| f(x)[h(x+k)] - f(x)[h(x)] - f(x)[h'(x)[k]]$$
$$+ f(x+k)[h(x+k)] - f(x)[h(x+k)] - f'(x)[k, h(x+k)]$$
$$+ f'(x)[k, h(x+k)] - f'(x)[k, h(x)] \Big\|$$

$$\leq \|f(x)\| \cdot \underbrace{\| h(x+k) - h(x) - h'(x)[k] \|}_{\in\, o(\|k\|) \text{ per Def}}$$
$$+ \underbrace{\| f(x+k)[h(x+k)] - f(x)[h(x+k)] - (f'(x)[h(x+k)])[k] \|}_{\in\, o(\|k\|) \text{ per Def}}$$
$$+ \|f'(x)\| \cdot \underbrace{\|k\| \cdot \| h(x+k) - h(x) \|}_{\in\, o(\|k\|) \text{ wegen Stetigkeit von } h.}$$

$$\dddot{y}(t) = \frac{d}{dt}\ddot{y}(t) = \frac{d}{dt}\Big(f_t(t,y(t)) + f_y(t,y(t))[\dot{y}(t)] \Big)$$

$$= [f_{tt}, f_{yt}]\begin{bmatrix}1\\ \dot{y}\end{bmatrix} + \frac{d}{dt}\Big(f_y(t,y(t))[\dot{y}(t)] \Big)$$

$$\overset{(\Delta)}{=} f_{tt} + f_{yt}[\dot{y}] + \Big(\underbrace{f_y'}_{=[f_{ty},\, f_{yy}]}\begin{bmatrix}1\\ \dot{y}\end{bmatrix}\Big)[\dot{y}] + f_y[\ddot{y}]$$

$$= f_{tt} + f_{yt}[\dot{y}] + f_{ty}[\dot{y}] + f_{yy}[\dot{y},\dot{y}] + f_y[\ddot{y}]$$

$$= f_{tt} + 2 f_{yt}[\dot{y}] + f_{yy}[\dot{y},\dot{y}] + f_y[\ddot{y}] .$$

Multi-Lineare Abbildung

Da die auftauchende Multi-Lineare Abbildung die Sache zu kompliziert macht, beschränken wir uns auf den Fall $n=1$.

$$\dddot{y} = f_{tt} + 2 f_{yt}\cdot\dot{y} + f_{yy}\cdot\dot{y}\cdot\dot{y} + f_y\ddot{y}$$