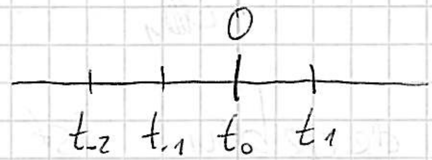
Übung 11: <u>Stabilität</u>

<u>Definition:</u> Angenommen, das Einschrittverfahren

$$y_{k+1} = y_k + h\,\Phi(f, t_k, y_k, y_{k+1}; h) \qquad \text{(ESV)}$$

auf äquidistantem Gitter

$$t_k = k \cdot h, \quad k \in \mathbb{Z}$$



angewendet auf das (skalare) Anfangswertproblem

$$\text{(TG)} \begin{cases} \dot{y}(t) = \lambda\, y(t), & \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) = 1 =: y_0 \end{cases}$$

Für die exakte Lösung y gilt
$y(t) = e^{\lambda t} \xrightarrow{t \to \infty} 0$
genau dann, wenn
$\lambda \in \mathbb{C}_-$

führt auf ein Verfahren der Form

$$y_{k+1} = F(h\lambda)\, y_k = \ldots = F(h\lambda)^k \cancel{y_0}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Dann heißt

$$\mathcal{B} := \{\mu \in \mathbb{C} \mid |F(\mu)| < 1\}$$

Für die Lösungsapproximation y_k gilt
$y_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$
genau dann, wenn
$|F(h\lambda)| < 1$

das zu~~gehörige~~ (ESV) gehörende
<u>Gebiet der absoluten Stabilität.</u>

Beispiel: Das Runge-Kutta-Verfahren, welches durch die Butcher-Tabelle

$$\begin{array}{c|ccc} a_1 & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_s & b_{s1} & \cdots & b_{ss} \\ \hline & c_1 & \cdots & c_s \end{array} =: \begin{array}{c|c} a & \mathcal{B} \\ \hline & c \end{array}$$

gegeben ist hat die Verfahrensfunktion

$$\Phi(\ldots) = c_1 k_1(\ldots) + \ldots + c_s k_s(\ldots) = c \cdot k$$

wobei die $k_1, \ldots, k_s$ Skalare sind die den Gleichungen

$$k_i = f(t_k + a_i h,\ y_k + h(b_{i1} k_1 + \ldots + b_{is} k_s)) \overset{(TG)}{=} \lambda\big(y_k + h \underbrace{(b_{i1} k_1 + \ldots + b_{is} k_s)}_{= b_i \cdot k \text{ mit } b_i := [b_{i1}, \ldots, b_{is}]}\big)$$

genügen. Man erhält somit

$$\underset{\in \mathbb{R}^s}{k := \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \lambda y_k + \lambda h \cdot b_1 k \\ \vdots \\ \lambda y_k + \lambda h\, b_s k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \lambda y_k + \lambda h \mathcal{B} k$$

$$\Rightarrow (I - \lambda h \mathcal{B}) k = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \lambda y_k \Rightarrow k = (I - \lambda h \mathcal{B})^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \lambda y_k$$

$$\overset{(ESV)}{\Rightarrow} y_{k+1} = y_k + h \Phi(\ldots) = y_k + h\, c k$$

$$= y_k + h \lambda c \cdot (I - \lambda h \mathcal{B})^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} y_k$$

$$= \underbrace{\left(1 + \lambda h c \cdot (I - \lambda h \mathcal{B})^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right)}_{=: F(\lambda h)} y_k .$$

Lemma 1: Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und $V \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine invertierbare Matrix. Dann liefert das Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & c \end{array} \qquad \text{(RKV)}$$

angewendet auf

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \quad \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

in eindeutiger Weise die Folge $\{y_k\}$ genau dann wenn (RKV) angewendet auf

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = V^{-1} f(t, V z(t)) =: \tilde{f}(t, z(t)) \\ z(0) = \underbrace{V^{-1} y_0}_{=: z_0} \end{cases}$$

in eindeutiger Weise die Folge $\{V^{-1} y_k\}$ liefert.

Beweis: Zuerst liefere (RKV) angewendet auf (1) in eindeutiger Weise die Folge $\{y_k\}$. D.h. im k-ten Schritt gilt

$$(\square) \quad y_{k+1} = y_k + h\,\Phi \quad \text{mit}$$

$\Phi = c_1 k_1 + \ldots + c_s k_s$ wobei die $k_1, \ldots, k_s$ die (nach Vorraussetzung) eindeutigen Lösungen der Gleichungen

$$k_i = f(t_k + a_i h,\ y_k + h(b_{i1} k_1 + \ldots + b_{is} k_s)), \quad i = 1, \ldots, s$$

sind. Damit sind auch die äquivalenten Gleichungen

$$V^{-1}k_i = V^{-1}f\left(t_k + a_i h, VV^{-1}\left(y_k + h(b_{i1}k_1 + \ldots + b_{is}k_s)\right)\right)$$

$$i = 1, \ldots, s$$

eindeutig lösbar. Mit $\tilde{k}_i := V^{-1}k_i$, $\tilde{y}_k := V^{-1}y_k$ sind diese Gleichungen wiederum äquivalent zu

$$(*)\quad \tilde{k}_i = \tilde{f}\left(t_k + a_i h, \tilde{y}_k + h(b_{i1}\tilde{k}_1 + \ldots + b_{is}\tilde{k}_s)\right), \; i = 1, \ldots, s.$$

Will man nun (RKV) auf (Z) anwenden, so sucht man eine Folge $\{z_k\}$, ~~die~~ für die gilt:

$$(**)\quad z_{k+1} = z_k + h\tilde{\underline{\Phi}} \quad \text{mit}$$

$$\tilde{\underline{\Phi}} = c_1\tilde{k}_1 + \ldots + c_s\tilde{k}_s$$ wobei die $\tilde{k}_1, \ldots, \tilde{k}_s$ genau die (wie gezeigt eindeutigen) Lösungen von $(*)$ sind. Damit gibt es eine solche (eindeutige) Folge $\{z_k\}$

$$\Rightarrow \tilde{\underline{\Phi}} = c_1\tilde{k}_1 + \ldots + c_s\tilde{k}_s = c_1V^{-1}k_1 + \ldots + c_sV^{-1}k_s$$

$$= V^{-1}(c_1k_1 + \ldots + c_sk_s) = V^{-1}\underline{\Phi}$$

$$\overset{(**)}{\Rightarrow} Vz_{k+1} = Vz_k + hV\tilde{\underline{\Phi}} = Vz_k + h\underline{\Phi}$$

und $Vz_0 = VV^{-1}y_0 = y_0$

$\Rightarrow$ Die Folge $\{Vz_k\}$ erfüllt (I)

$\overset{\text{Eindeutigkeit}}{\Rightarrow}$ $y_k = Vz_k \Rightarrow \{z_k\} = \{V^{-1}y_k\}$ löst (Z) in eindeutiger Weise.

Die Rückrichtung folgt analog mit der Substitution $V \to V^{-1}$. $\blacksquare$

Lemma 2: Sei $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1, n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2, n_2}$ und $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_1}$, $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_2}$. Dann liefert das Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & c \end{array} \qquad \text{(RKV)}$$

angewendet auf

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}(t) + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

in eindeutiger Weise die Folge $\left\{ \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} \right\}$ genau dann, wenn (RKV) angewendet auf

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = A_1 y(t) + g_1(t) \\ y(0) = y_0 \end{array} \right\} \quad \underline{\text{und}} \quad (3) \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}(t) = A_2 z(t) + g_2(t) \\ z(0) = z_0 \end{array} \right\}$$

in eindeutiger Weise die Folgen $\{y_k\}$ und $\{z_k\}$ liefert.

Beweis: Es liefere (RKV) angewendet auf (1) in eindeutiger Weise die Folge $\left\{ \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} \right\}$. D.h. im k-ten Schritt gilt

$$(\square) \quad \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} \quad \text{mit}$$

$$\phi = c_1 k_1 + \ldots + c_s k_s \quad \text{und} \quad \psi = c_1 l_1 + \ldots + c_s l_s$$

wobei die $k_1, \dots, k_s, l_1, \dots, l_s$ die (nach Vorraussetzung) eindeutige(n) Lösung(en) der Gleichungen

$$\begin{bmatrix} k_i \\ l_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} + h \left(b_{i1} \begin{bmatrix} k_1 \\ l_1 \end{bmatrix} + \dots + b_{is} \begin{bmatrix} k_s \\ l_s \end{bmatrix} \right) \right) + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}$$

$$i = 1, \dots, s$$

$$\Updownarrow$$

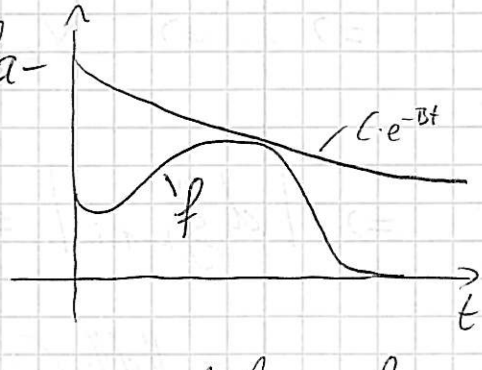
$$\begin{cases} k_i = A_1 \left(y_k + h(b_{i1} k_1 + \dots + b_{is} k_s) \right) + g_1(t) & i = 1, \dots, s \\ l_i = A_2 \left(z_k + h(b_{i1} l_1 + \dots + b_{is} l_s) \right) + g_2(t) & i = 1, \dots, s \end{cases}$$

Damit folgt die Behauptung ähnlich dem Beweis von Lemma 1.

$\boxtimes$

<u>Proposition:</u> Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ diagonalisierbar und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig, so dass es $C, \beta > 0$ gibt mit

$$\|f(t)\| \le C \cdot e^{-\beta t}, \quad t \geq 0$$



Liefert dann das Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & c \end{array} \qquad \text{(RKV)}$$

mit Schrittweite $h > 0$ angewendet auf

Matrix AWP

$$\text{(MAWP)} \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = A\, y(t) + g(t) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

in eindeutiger Weise die Folge $\{y_k\}$ und gilt

$$\sigma(h \cdot A) = h \cdot \underbrace{\sigma(A)}_{\text{Spektrum von } A \text{, d.h. Menge der Eigenwerte}} \subseteq \mathcal{B}$$

das zu (RKV) gehörende Gebiet der Absoluten Stabilität (siehe Def.)

so folgt

$$\lim_{k \to \infty} y_k = 0 .$$

<u>Beweis:</u> Mit Lemma 1 und Lemma 2 kann man sich auf den skalaren Fall $A = \lambda \in \mathbb{R}^{1,1}$ beschränken.

Setzt man

$$\hat{g}_k := \begin{bmatrix} g(t_k + a_1 h) \\ \vdots \\ g(t_k + a_s h) \end{bmatrix}$$

so erhält man wie in obigem Beispiel, dass

$$y_{k+1} = \underbrace{F(h\lambda)}_{=:F}\, y_k + \underbrace{c\,(I - h\lambda B)^{-1}}_{=:d}\, \hat{g}_k$$

$$\Rightarrow \; y_1 = F y_0 + d\hat{g}_0$$

$$\Rightarrow \; y_2 = F^2 y_0 + F d\hat{g}_0 + d\hat{g}_1$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \; y_k = F^k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} F^i d\hat{g}_{k-1-i}$$

$$\Rightarrow \; |d\hat{g}_{k-1-i}| \leq \|d\|_1 \cdot \|\hat{g}_{k-1-i}\|_\infty \leq \|d\|_1 \cdot C \cdot e^{-B t_{k-1-i}}$$

$$= \|d\| \cdot C \cdot e^{-B \cdot h \cdot (k-1-i)} =: D \cdot \alpha_2^{(k-1-i)}$$

und setze noch $\alpha_1 := |F|$.

Dann sind $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1)$ und es gilt:

$$|y_k| \leq \alpha_1^k \cdot |y_0| + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_1^i \cdot \alpha_2^{k-1-i}$$

$\alpha := \max(\alpha_1, \alpha_2) < 1$

$$\leq \alpha^k \cdot |y_0| + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{k-1}.$$

$$\leq \max(|y_0|, 1) \cdot \left[(k+1) \cdot \alpha^{k-1} \right] \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

∎

Bemerkung: Nimmt man an, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

mit $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar ist so gilt wegen der Stetigkeit von y, dass

$$y(t) \approx y_0 \qquad \text{für kleine } t \in [0, \varepsilon).$$

Dann liefert Taylor-Entwicklung:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) = f(t, y_0) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} f(t, y_0)}_{=: A} (y(t) - y_0) + \mathcal{O}(\|y(t) - y_0\|^2)$$

$$\approx A\, y(t) + \underbrace{\left[f(t, y_0) - A y_0 \right]}_{=: g(t)} .$$

D.h. lokal ~~ist~~ wird jede Differentialgleichung (mit stetig differenzierbarem f) durch eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{y}(t) = A y(t) + g(t)$$

approximiert.