Übung 2: LR-Zerlegung, Normen & Konditionszahl

Fehler in Übung 1:

$$\Big|\underbrace{Df|_0}_{\in\mathbb{R}^{1,n}}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}\Big| \le \cancel{\underbrace{\|Df|_0\|_1}_{\text{Matrixnorm}}\cdot\left\|\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}\right\|_\infty} \le \underbrace{\|Df|_0^T\|_1}_{\text{Vektornorm}}\cdot\left\|\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}\right\|_\infty$$

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf den Vektorräumen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ und $A\in\mathbb{R}^{n,m}$ eine Matrix, so heißt

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

die von $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm/Operatornorm.

Da der $\mathbb{R}^m$ endlichdimensional ist, ist

$$K := \{x\in\mathbb{R}^m \mid \|x\|=1\}$$

kompakt und das Supremum wird angenommen, d.h.

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1}\|Ax\| = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Damit gilt für alle $A\in\mathbb{R}^{n,m}$ und $y\in\mathbb{R}^m$, dass

$$\frac{\|Ay\|}{\|y\|} \le \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$$

$$\Rightarrow \quad \|Ay\| \le \|A\|\cdot\|y\| \qquad (1)$$

und es gibt ein $\hat{y} \neq 0$ mit

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\|A\hat{y}\|}{\|\hat{y}\|}$$

$$\Rightarrow \quad \|A\hat{y}\| = \|A\| \cdot \|\hat{y}\| \, .$$

<u>Definition:</u> Ist $\|\cdot\|_\alpha$ eine Norm und $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar so heißt

$$\kappa_\alpha(A) = \|A\|_\alpha \cdot \|A^{-1}\|_\alpha$$

Konditionszahl von A (bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\alpha$).

<u>Satz</u>: Für jede invertierbare Matrix A ist

$$\inf_{B \text{ singulär}} \frac{\|A - B\|}{\|A\|} \geq \frac{1}{\kappa(A)} \, .$$

Für die $\|\cdot\|_2$-Norm gilt Gleichheit.

<u>Beweis:</u> Sei zunächst B eine beliebige singuläre Matrix und $x \neq 0$ mit $Bx = 0$.

$$\Rightarrow \|x\| = \|A^{-1}Ax\| \overset{(1)}{\leq} \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|$$

$$= \|A^{-1}\| \cdot \|(A-B)x\| \overset{(1)}{\leq} \|A^{-1}\| \cdot \|A-B\| \cdot \|x\| \, .$$

Da $\|x\| \neq 0$ folgt $1 \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|$

$$\Rightarrow \frac{1}{\kappa(A)} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A-B\|}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} = \frac{\|A-B\|}{\|A\|}$$

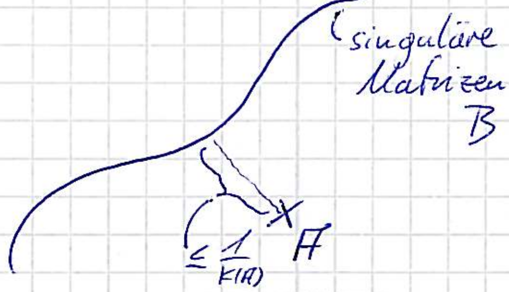
Da B beliebig war, erhalten wir die Abschätzung.

Die Gleichheit bei der $\|\cdot\|_2$-Norm wird im Tutorium gezeigt.

$\blacksquare$

Der Satz impliziert, dass die Menge der invertierbaren Matrizen

$$GL(n)$$



offen ist, denn sei $A \in GL(n)$ beliebig und betrachte die offene Menge

$$\cancel{B_{\left(\frac{1}{2\kappa(A)}\right)}(A) := \left\{ C \in \mathbb{R}^{n \times n} \;\middle|\; \|A - C\| < \frac{1}{2\kappa(A)} \right\}}.$$

$$B_{\left(\frac{1}{2\|A^{-1}\|}\right)}(A) := \left\{ C \in \mathbb{R}^{n \times n} \;\middle|\; \|A - C\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \right\}.$$

Um zu zeigen, dass $B_{\frac{1}{2\|A^{-1}\|}}(A) \subseteq GL(n)$ sei $C \in B_{\frac{1}{2\|A^{-1}\|}}(A)$ beliebig, d.h. es gelte

$$\|A - C\| \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \implies \frac{\|A - C\|}{\|A\|} < \frac{1}{2} \frac{1}{\kappa(A)}$$

$\overset{\text{Satz}}{\implies}$ C ist invertierbar, d.h. $C \in GL(n)$.

Wir betrachten nun das Verfahren, welches bei festem $b \in \mathbb{R}^n$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ löst, d.h.

betrachten die Funktion $f : GL(n) \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$f(A) := A^{-1} b \qquad (*)$$

<u>Definition:</u> Sei $f : V \to W$ eine Abbildung zwischen den normierten Vektorräumen V und W. Sei $U \subset V$ offen. Dann heißt die lineare Abbildung

$$Df|_X : V \to W$$

<u>Ableitung von f</u> an der Stelle $X \in U$, falls

$$\lim_{H \to 0} \frac{1}{\|H\|} \| f(X+H) - [f(X) + Df|_X [H]] \| = 0 .$$

Wir zeigen, dass die lineare Abbildung

$$Df|_A : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}^n \quad , \quad Df|_A [E] := - A^{-1} E A b$$

für $A \in GL(n)$ die Ableitung von $(*)$ ist. Weil

$$\| f(A+E) - f(A) - Df|_A [E] \|$$

$$= \| (A+E)^{-1} b - A^{-1} b + A^{-1} E A^{-1} b \|$$

$$= \| (A+E)^{-1} [b - (A+E) A^{-1} b] + A^{-1} E A^{-1} b \|$$

$$= \| (A+E)^{-1} [- E A^{-1} b] + A^{-1} [E A^{-1} b] \|$$

$$= \| [A^{-1} - (A+E)^{-1}] \cdot E A^{-1} b \|$$

$$\overset{(2)}{\leq} \| A^{-1} - (A+E)^{-1} \| \cdot \|E\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|b\|$$

folgt

$$\lim_{E \to 0} \frac{1}{\|E\|} \| f(A+E) - [f(A) + Df|_A [E]] \|$$

$$\leq \lim_{E \to 0} \frac{1}{\cancel{\|E\|}} \|A^{-1} - (A+E)^{-1}\| \cdot \cancel{\|E\|} \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|b\|$$

$$= \|A^{-1}\| \cdot \|b\| \cdot \underbrace{\lim_{E \to 0} \| A^{-1} - (A+E)^{-1} \|}_{= 0 \text{, wegen Stetigkeit der Inversion}} = 0 .$$

Daher ist die Kondition von (*) beschränkt durch

$$\kappa_{abs}(A) = ||| Df|_A ||| = \max_{E \neq 0} \frac{\| Df|_A [E] \|}{\|E\|}$$

$$= \max_{E \neq 0} \frac{\|A^{-1} E A^{-1} b\|}{\|E\|} \overset{(2)}{\leq} \max_{E \neq 0} \frac{\|A^{-1}\| \|E\| \cdot \|A^{-1} b\|}{\|E\|}$$

$$= \|A^{-1}\| \cdot \|A^{-1} b\|$$

und die relative Kondition durch

$$\kappa_{rel}(A) = \|A\| \frac{\kappa_{abs}(A)}{\|A^{-1} b\|} \leq \|A\| \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A^{-1} b\|}{\|A^{-1} b\|} = \kappa(A) .$$

die Konditionszahl von A.