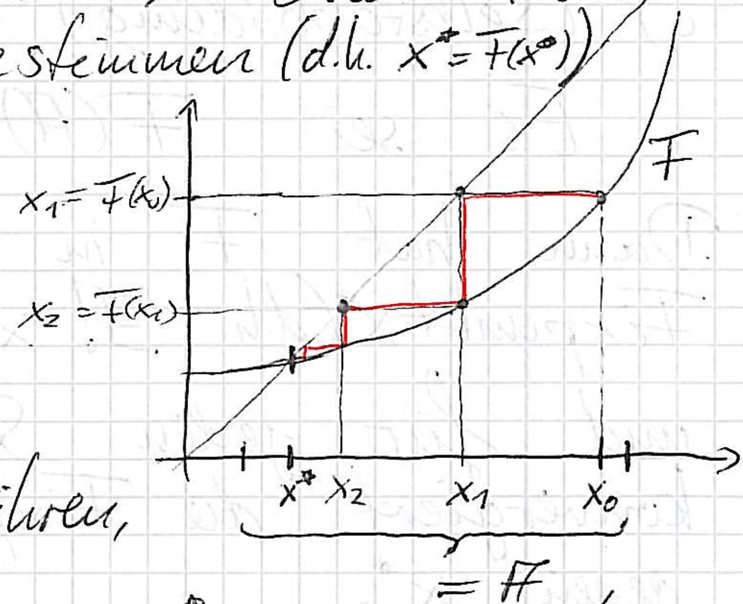
Übung 4: Fixpunktiterationen

Will man den Fixpunkt x^* einer Funktion $F : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bestimmen (d.h. $x^* = F(x^*)$) so kann man die

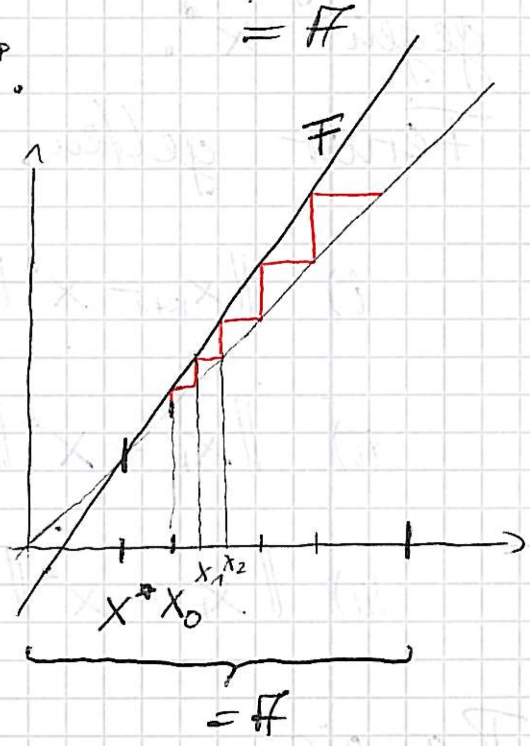


Fixpunktiteration

$$x_{k+1} := F(x_k)$$

mit $x_0 \in \mathcal{D}$ ausführen, und hoffen, dass $\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$.

Wann geht das gut?



Banach'scher Fixpunktsatz:

Sei $F : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Es gelte:

a) (Kontraktivität)

Es gibt eine Konstante $L \in [0,1)$ mit

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{D}$$

b) (Abgeschlossenheit)

A sei abgeschlossen.

c) (Selbstabbildung)

Es sei $F(A) \subseteq A$.

Dann hat F in A genau einen Fixpunkt x^* (d.h. $\exists!\, x^* \in A$ mit $x^* = F(x^*)$) und für jeden Startwert $x_0 \in A$ konvergiert die Fixpunktiteration $x_{k+1} = F(x_k)$ gegen x^*.

Ferner gelten die Fehlerabschätzungen:

i) $\|x_{k+1} - x^*\| \leq L \, \|x_k - x^*\|$ (lineare Konvergenz)

ii) $\|x_k - x^*\| \leq \frac{1}{1-L} \|x_{k+1} - x_k\|$ (a posteriori Fehlerabschätzung)

iii) $\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|$ (a priori Fehlerabschätzung)

<u>Beweis:</u>

Wegen c) folgt aus $x_k \in A$ schon $x_{k+1} = F(x_k) \in F(A) \subseteq A$ und $\{x_k\}$ ist wohl-definiert.

Mit a) ist $\|x_{i+1} - x_i\| = \|\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})\| \leq L \cdot \|x_i - x_{i-1}\|$ und damit für alle $k, m \in \mathbb{N}$

$$\|x_{k+m+1} - x_k\| \leq \|x_{k+m+1} - x_{k+m}\| + \|x_{k+m} - x_{k+m-1}\| + \ldots + \|x_{k+1} - x_k\|$$

$$\leq L^{k+m} \cdot \|x_1 - x_0\| + L^{k+m-1} \|x_1 - x_0\| + \ldots + L^k \|x_1 - x_0\|$$

$$= L^k \|x_1 - x_0\| \cdot \underbrace{\left(L^m + L^{m-1} + \ldots + 1\right)}_{= \sum_{i=0}^{m} L^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} L^i = \frac{1}{1-L}}$$

$$\leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|$$, d.h. $\{x_k\}$ ist

Cauchy-Folge und damit konvergent gegen ein x^*. Da A abgeschlossen ist

$$x^* = \left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) \in A$$, da $\{x_k\} \subseteq A$.

<u>Eindeutigkeit von x^*:</u>

Sei $\hat{x} \in A$ ein anderer Fixpunkt $\hat{x} = F(\hat{x})$.
Dann ist

$$\|x^* - \hat{x}\| = \|F(x^*) - F(\hat{x})\| \leq L \cdot \|x^* - \hat{x}\|$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-L)}_{>0, \text{ da } L \in [0,1)} \|x^* - \hat{x}\| \leq 0 \qquad \Rightarrow \|x^* - \hat{x}\| = 0$$

$$\Rightarrow x^* = \hat{x}.$$

Fehlerabschätzungen:

i) $\|x_{k+1} - x^*\| = \|F(x_k) - F(x^*)\| \leq L \cdot \|x_k - x^*\|$

ii) Wegen

$$\|x_k - x^*\| \leq \|x_k - x_{k+1}\| + \|x_{k+1} - x^*\|$$
$$= \quad -\text{"}- \quad + \|F(x_k) - F(x^*)\|$$

$$\Rightarrow \|x_k - x^\circ\| \leq \|x_{k+1} - x_k\| + L \cdot \|x_k - x^\circ\|$$

$$\Rightarrow \quad (1-L)\|x_k - x^\circ\| \leq \|x_{k+1} - x_k\| .$$

$$\Rightarrow \quad \|x_k - x^\circ\| \leq \frac{1}{1-L} \|x_{k+1} - x_k\|$$

iii) $$\|x_k - x^\circ\| \leq \frac{1}{1-L} \underbrace{\|x_{k+1} - x_k\|}$$

$$= \|F(x_k) - F(x_{k-1})\|$$

$$\leq L \|x_k - x_{k-1}\| = \ldots =$$

$$\leq L^2 \|x_{k-1} - x_{k-2}\| \leq \ldots \leq L^k \|x_1 - x_0\|$$

$$\leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|$$

$\blacksquare$

Wie kann man die Kontraktivität einer differenzierbaren Abbildung F überprüfen?

<u>Lemma:</u>

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $F: A \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.

Dann gibt es eine Konstante $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass

induzierte Operatornorm $$\|DF|_x\| \leq L \quad \forall x \in A$$

genau dann wenn

$$\|F(x)-F(y)\| \leq L \cdot \|x-y\| \quad \forall x,y \in A.$$

<u>Beweis:</u>

"$\Rightarrow$" Seien also $x,y \in A$ beliebig und setze

$$f(t) := F(\underbrace{x+t(y-x)}_{\in A, \text{ da } A \text{ konvex}})$$

$\Rightarrow f$ ist wohl-definiert

Dann ist

$$f'(t) = DF\big|_{(x+t(y-x))} \cdot (y-x) \quad \text{(Kettenregel)}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\vartheta \in [0,1]$ mit

$$f(1)-f(0) = f'(\vartheta)(1-0)$$

$$\Rightarrow \|F(x)-F(y)\| = \|f(0)-f(1)\|$$

$$= \|f'(\vartheta)(1-0)\| = \|DF\big|_{x+\vartheta(y-x)} \cdot (y-x)\|$$

$$\leq \underbrace{\|DF\big|_{x+\vartheta(y-x)}\|}_{\leq L} \cdot \|y-x\| \leq L \cdot \|y-x\|$$

"$\Leftarrow$" Da $\|DF|_x\| \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{\|h\|=1} \|DF|_x \cdot h\|$

genügt es zu zeigen, dass für $\|h\|=1$ gilt

$$\|DF|_x \cdot h\| \leq L \qquad \forall x \in A.$$

Setze dazu

$$f(t) := F(x+th)$$

$$\Rightarrow f'(t) = DF|_{(x+th)} \cdot h$$

$$\Rightarrow \| DF|_x \cdot h \| = \| f'(0) \|$$

$$= \left\| \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \right\|$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{|t|} \| f(t) - f(0) \|$$

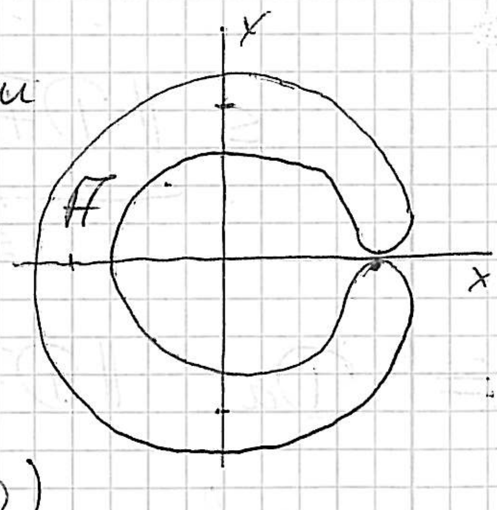
$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{|t|} \| F(x+th) - F(x) \|$$

$$\leq \lim_{t \to 0} \frac{1}{|t|} \| (x+th) - x \| \cdot L$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{|t|} \|h\| \cdot L = L$$

$\blacksquare$

Das die Konvexität in obigem Lemma wirklich nötig ist zeigt die Funktion



$$f : A \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = (\arg(x+iy), 0).$$

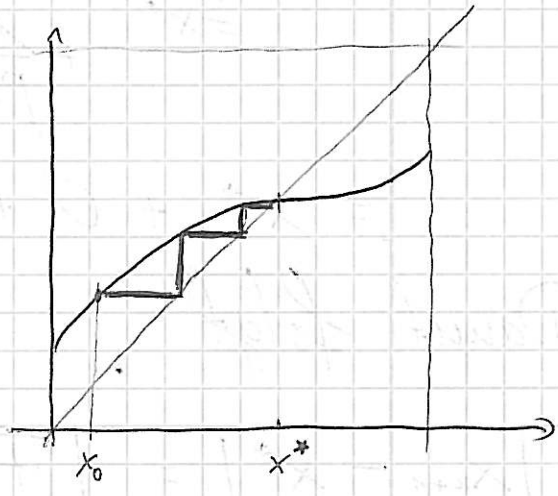
Argument $= \varphi$ in $x+iy = r \cdot e^{i\varphi}$ $\quad \varphi \in [0, 2\pi)$

Definition:

Eine Folge $\{x_k\}$ heißt konvergent mit Ordnung $p \geq 1$ gegen x^*, falls es eine Konstante $C \geq 0$ (mit $C < 1$ falls $p = 1$) und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_k - x^*\|^p \quad \forall k \geq N.$$

Ist eine Folge also konvergent mit Ordnung $p > 1$ so ist sie nicht automatisch konvergent.



Die Folge aus dem Banachschen Fixpunktsatz konvergiert also mit Ordnung 1.

Wann konvergiert sie mit höherer Ordnung?

Lemma:

Die Iterationsfunktion $F: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erfülle die 3 Vorraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes und sei außerdem p mal stetig differenzierbar in A.

Es sei $x^* \in A$ der dann eindeutige

Fixpunkt und es gelte

$$D^i F\big|_{x^*} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, p-1\}.$$

Dann konvergiert die Fixpunktiteration $x_{k+1} = F(x_k)$ mit Ordnung p.

<u>Beweis:</u> Im Fall $n = 1$ ist mit Taylor

$$\begin{aligned}
F(x) &= \cancel{F(x^*) + DF\big|_{x^*}(x-x^*)} \\
&= \underbrace{F(x^*)}_{=x^*} + F'(x^*)(x-x^*) + \dots + \frac{1}{(p-1)!} F^{(p-1)}(x^*)(x-x^*)^{p-1} \\
&\quad + \frac{1}{p!} F^{(p)}(\xi)(x-x^*)^p \\
&= x^* + 0 + \dots + 0 + \frac{1}{p!} F^{(p)}(\xi)(x-x^*)^p.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
|x_{k+1} - x^*| &= |F(x_k) - x^*| \\
&= \left|\frac{1}{p!} F^{(p)}(\xi_k) \cdot (x_k - x^*)^p\right| \\
&\leq \underbrace{\frac{1}{p!} \max_{x \in A} |F^{(p)}(x)|}_{=:C} \cdot |x_k - x^*|^p \\
&= C \cdot |x_k - x^*|^p,
\end{aligned}$$

d.h. die Behauptung.