Übung 7: Interpolation

Zu den paarweise verschiedenen Knoten

$$\Delta := \{ a = x_0 < \dots < x_n = b \}$$

haben die Lagrange-Funktionen

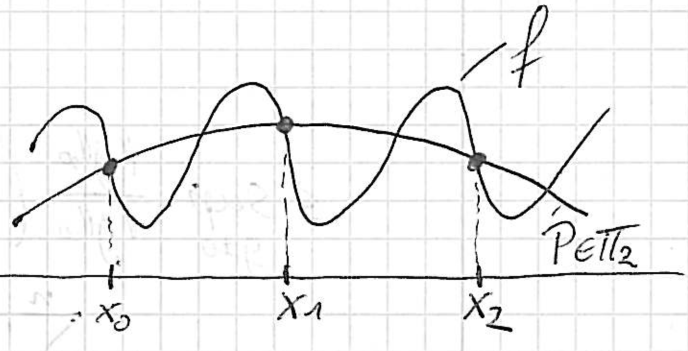
$$L_i(x) := \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} \in \Pi_n, \quad i = 0, \dots, n$$

Polynome vom Grad $\leq n$

die Eigenschaft

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} \quad , i,j = 0, \dots, n.$$

Deswegen ist zu $f \in \mathcal{C}([a,b])$ das eindeutige Interpolationspolynom in den Knoten Δ durch



$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \in \Pi_n$$

gegeben. Damit ist die Abbildung

$$\phi_\Delta : \mathcal{C}([a,b]) \to \Pi_n \quad , \quad \phi_\Delta(f) := \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) ,$$

welche die Polynominterpolation beschreibt, wohl-definiert.

Satz: Die Kondition der Polynominterpolation bzgl. der Supremumsnorm ist

$$\|D\phi_\Delta(f)\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)| =: \Lambda_\Delta$$

Beweis: Da ϕ_Δ linear ist gilt

$$D\phi_\Delta(f)[g] = \phi_\Delta(g) \quad \text{und damit}$$

$$\|D\phi(f)\|_\infty := \sup_{g\neq 0} \frac{\|D\phi_\Delta(f)[g]\|_\infty}{\|g\|_\infty} = \sup_{g\neq 0} \frac{\|\phi_\Delta(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty}$$

$$= \sup_{g\neq 0} \frac{1}{\|g\|_\infty}\Big(\max_{x\in[a,b]} \underbrace{\Big|\sum_{i=0}^{n} g(x_i)\, L_i(x)\Big|}_{\leq \sum_{i=0}^{n} \underbrace{|g(x_i)|}_{\leq \|g\|_\infty} \cdot |L_i(x)|} \Big)$$

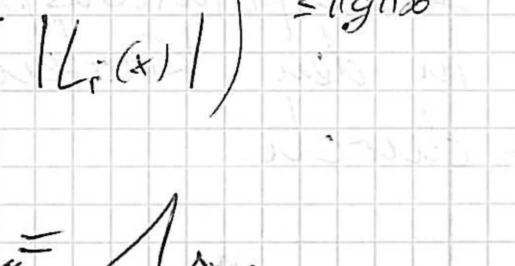
$$\leq \sup_{g\neq 0} \frac{\|g\|_\infty}{\|g\|_\infty}\Big(\max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)| \Big)$$

$$= \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)| = \Lambda_\Delta .$$

Ist umgekehrt $\xi \in [a,b]$ mit

$$\sum_{i=0}^{n} |L_i(\xi)| = \Lambda_\Delta$$

und wählt man $\tilde{g} \in \mathcal{C}([a,b])$ als die stückweise linear Interpolierende[1] zu den Punkten $(x_i, \operatorname{sign} L_i(\xi))$



dann folgt $\|\tilde{g}\|_\infty = 1$ und damit

$$\|D\phi\|_\infty = \sup_{\|g\|_\infty = 1} \|\phi(g)\| \geq \|\phi(\tilde{g})\|$$

$$= \sup_{x\in[a,b]} \left| \sum_{i=0}^{n} \tilde{g}(x_i)\, L_i(x) \right|$$

$$\geq \left| \sum_{i=0}^{n} \tilde{g}(x_i)\, L_i(\xi) \right|$$

$$= \sum_{i=0}^{n} |L_i(\xi)| = \Lambda_\Delta. \left(= \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|\right)$$

Man kann zeigen, dass Λ_Δ nur von der relativen Lage der Knoten $x_0, \dots, x_n$ abhängt, d.h. invariant unter ~~ein~~ Transformation der Form

$$x \mapsto t = cx + d \quad , c, d \in \mathbb{R}$$

ist.

Berechnung von Λ_n: (Ordner: polynome)

```
>> COMPUTE_LAMBDA (0:2)
```

dann (0:5), (0:10), (0:20)

Tschebyscheff-Knoten berechnen

```
>> n = 4; tsch = cos((2*(0:n)+1)/(2*n+2)*pi);
>> COMPUTE_LAMBDA (tsch)
```

dann $n = 10, 20, \dots$

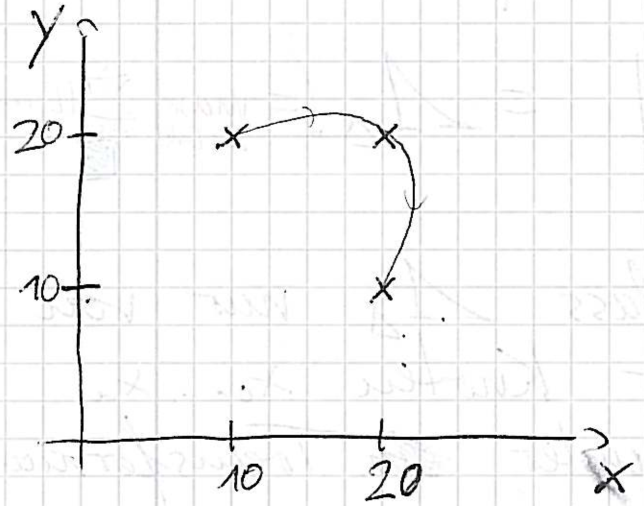
~~>> POLYPLAY~~ ~~>> POLYPLAY(1)~~

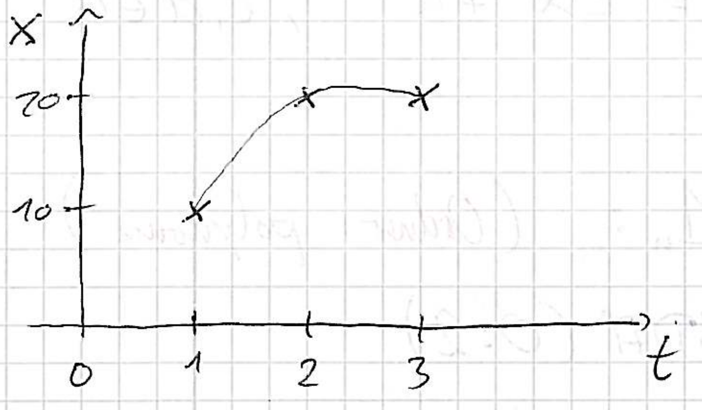
» POLYPLAY

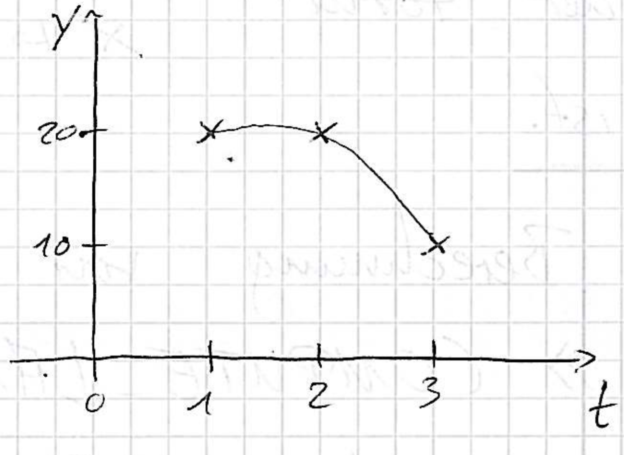
» POLYPLAY (1)

Splines

» SPLINEPLAY







» SPLINEPLAY ~~2d~~ ('2d')

» SPLINEPLAY ('bezier')

bezier_demo von Matlab File Exchange

bezier_demo.m

Bézier - Technik

Da aus dem binomischen Lehrsatz folgt

$$1 = \left((1-t)+t\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \qquad (*)$$

definiert man die Bernstein-Polynome als

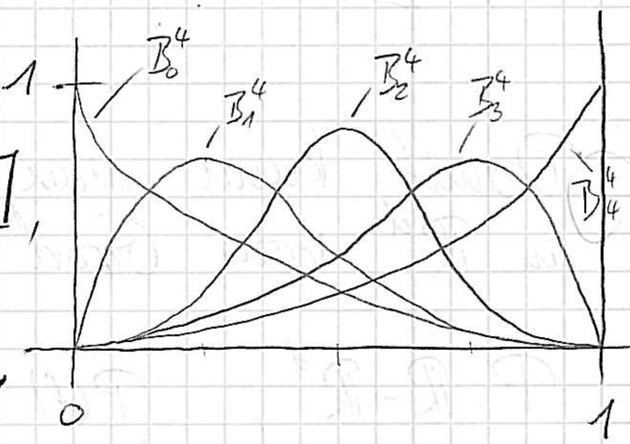
$$B_i^n(t) := \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \quad \in \Pi_n$$

und hat folgenden Satz.

Satz:

1.) • $B_i^n(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,1]$,

• $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$,



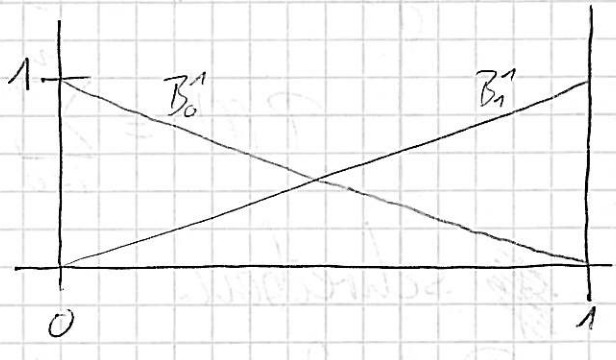
d.h. die Bernsteinpolynome bilden ~~eine~~ auf $[0,1]$ eine nicht-negative Teilung der Eins.

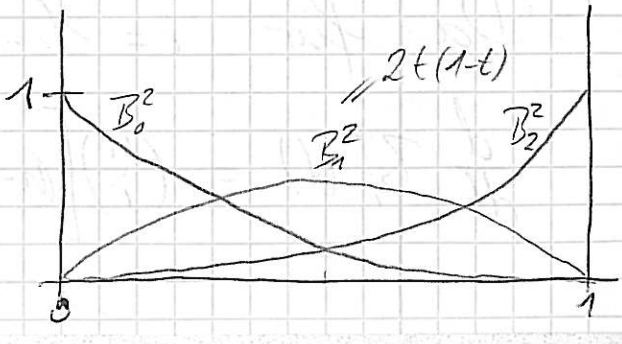
2.) • $B_0^n(t) = (1-t) B_0^{n-1}(t)$

• $B_i^n(t) = t\, B_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t) B_i^{n-1}(t)$,

für $i = 1, \dots, n-1$

• $B_n^n(t) = t\, B_{n-1}^{n-1}(t)$.





3.) Die Bernstein-Polynome $B_0^n, \dots, B_n^n$ bilden eine Basis von Π_n

Beweis:
1.) folgt mit (*), und da für $t \in [0,1]$ gilt

$$t \geq 0 \quad , \quad 1-t \geq 0$$

2.) Ist Hausaufgabe

3.) Im Tutorium

$\blacksquare$

Damit kann man jede polynomielle Kurve im $\mathbb{R}^d$ vom Grad n, d.h. jedes

$$P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d, \quad P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^d$$

$$a_n \neq 0,$$

bezüglich der Bernstein-Basis als

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t)$$

schreiben.

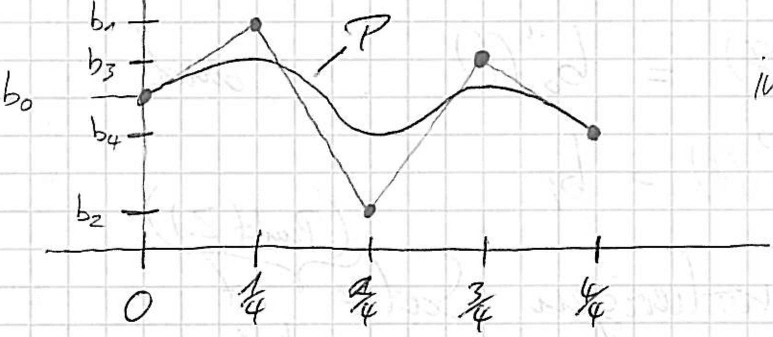
Da für $i = 1, \dots, n-1$ gilt

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = \binom{n}{i} \left[(n-i)(1-t)^{n-i-1}(-1) t^i + i(1-t)^{n-i} t^{i-1} \right]$$

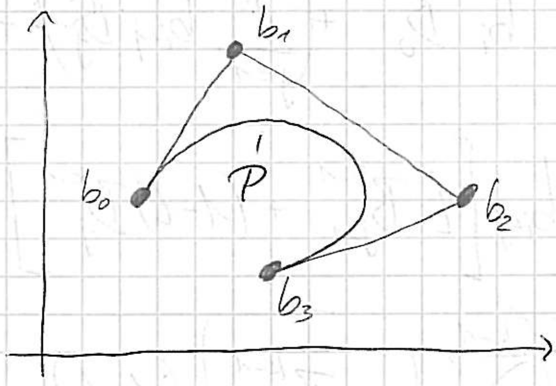
$$= \binom{n}{i}(1-t)^{n-i-1} t^{i-1}\left[-(n-i)t + i(1-t)\right]$$

$$= \binom{n}{i}(1-t)^{n-i-1} t^{i-1}\left[i - nt\right] ,$$

hat (mit Hilfe des obigen Bildes zu $B_0^4, \dots, B_4^4$) jedes B_i^n sein Maximum bei $\frac{i}{n}$. D.h. der Koeffizient b_i hat den größten Einfluss an der Stelle $\frac{i}{n}$.



im $\mathbb{R}^1$



im $\mathbb{R}^2$ taucht der Definitionsbereich $[0, 1]$ in der Graphik nicht mehr auf

Um nun $P(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t)$ an einem bestimmten Punkt $t_0 \in [0, 1]$ auszuwerten, verwendet man den Algorithmus von de Casteljau, der auf folgendem Satz beruht.

Satz: Die Teilpolynome von $P(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t)$ welche durch

$$b_i^k(t) := \sum_{j=0}^{k} b_{i+j} B_j^k(t) = \sum_{j=i}^{i+k} b_j B_{j-i}^k(t)$$

gegeben sind genügen der Rekursion

$$b_i^k(t) = (1-t)\, b_i^{k-1} + t\, b_{i+1}^{k-1}$$

für $k = 1, \dots, n$ und $i = 0, \dots, n-k$. Es ist

$$P(t) = b_0^n(t) \quad \text{und}$$

$$b_i^0(t) = b_i$$

Beweis: Mit vorherigen Satz $\overbrace{\text{ist}}^{\text{(Punkt 2.)}}$

$$b_i^k = \sum_{j=0}^{k} b_{i+j} B_j^k = b_i B_0^k + \left(\sum_{j=1}^{k-1} b_{i+j} B_j^k\right) + b_{i+k} B_k^k$$

$$= b_i (1-t) B_0^{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} b_{i+j} \left[t B_{j-1}^{k-1} + (1-t) B_j^{k-1} \right] + b_{i+k}\, t B_{k-1}^{k-1}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{k} b_{i+j} B_{j-1}^{k-1}\right) t + \left(\sum_{j=0}^{k-1} b_{i+j} B_j^{k-1}\right)(1-t)$$

$$= t\, b_{i+1}^{k-1} + (1-t)\, b_i^{k-1} \qquad \blacksquare$$

Schema von de Casteljau

$$\begin{array}{llllll}
b_0 = b_0^0 & & & & & \\
b_1 = b_1^0 & \rightarrow b_0^1 & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
b_{n-1} = b_{n-1}^0 & & \cdots & b_0^{n-1} & & \\
b_n = b_n^0 & \rightarrow b_{n-1}^1 & \cdots & b_1^{n-1} & \rightarrow b_0^n & = P
\end{array}$$