Übung 8: Integration

Es bezeichne die Abbildung $I: \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$,

$$I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$$

die Integration.

Satz: Die absolute Kondition der Integration bezüglich der L^1-Norm $\|\cdot\|_1$ ist

$$\|DI(f)\|_1 = 1 \qquad \forall f \in \mathcal{C}[a,b].$$

Beweis: Da I linear ist, ist mit

$$DI(f)[h] := I(h),$$

wegen

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_1} \left| I(f+h) - (I(f) + DI(f)[h]) \right|$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_1} \left| I(f) + I(h) - I(f) + I(h) \right| = 0,$$

das Differential gefunden. Damit ist

$$\|DI(f)\|_1 = \sup_{h\neq 0} \frac{|DI(f)[h]|}{\|h\|_1} = \sup_{h\neq 0} \frac{\left|\int_a^b h(x)\,dx\right|}{\|h\|_1}$$

$$\leq \sup_{h\neq 0} \frac{\int_a^b |h(x)|\,dx}{\|h\|_1} = \sup_{h\neq 0} \frac{\|h\|_1}{\|h\|_1} = 1$$

und andererseits mit $\tilde{h}(x) :\equiv 1$

$$\|DI(f)\|_1 \geq \frac{|I(\tilde{h})|}{\|\tilde{h}\|_1} = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

☒

Euler - Maclaurin - Summenformel

<u>Definition:</u> Die Bernoulli-Polynome $B_k \in \Pi_k$ sind rekursiv durch

$$B_0(x) :\equiv 1$$

$$B_{k+1}(x) := A_{k+1} + (k+1)\int_0^x B_k(t)\,dt$$

mit den Konstanten $A_{k+1} := -(k+1)\int_0^1\left(\int_0^x B_k(t)\,dt\right)dx \in \mathbb{R}$.

<u>Beispiel:</u> $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$

L1 <u>Lemma 1:</u> Für die Bernoulli-Polynome gilt:

a) $B'_{k+1}(x) = (k+1)\,B_k(x)$, $k \geq 0$

b) $\int_0^1 B_k(t)\,dt = 0$, $k \geq 1$

c) $B_k(0) = B_k(1) = A_k$, $k \geq 2$

d) $B_1(0) = -\frac{1}{2}$, $B_1(1) = \frac{1}{2}$

e) $(-1)^k B_k(1-x) = B_k(x)$, $k \geq 0$, $x \in [0,1]$

f) $B_{2k+1}(1) = 0 = B_{2k+1}(0)$, $k \geq 1$.

<u>Beweis:</u> a) ÷ d) sind Hausaufgabe.

Für e) setzt man $C_k(x) := (-1)^k B_k(1-x)$.

Dann ist

1.) $C_{k+1}'(x) = (-1)^{k+1} B_{k+1}'(1-x)(-1)$

$$\overset{a)}{=} (-1)^k (k+1) B_k(x) = (k+1) C_k(x), \quad k \geq 0$$

und

2.) $\int_0^1 C_k(t)\,dt = (-1)^k \int_0^1 B_k(\underbrace{1-t}_{=:\varphi(t)})\,dt$

$$= (-1)^{k-1} \int_0^1 \varphi'(t) B_k(\varphi(t))\,dt$$

$$= (-1)^{k-1} \int_1^0 B_k(t)\,dt = (-1)^k \int_0^1 B_k(t)\,dt \overset{b)}{=} 0$$

$$k \geq 1,$$

d.h. auch C_k genügt den Bedingungen a) und b). Außerdem ist

$$C_0(x) = (-1)^0 B_0(x) = 1 = B_0(x). \quad \text{(IA)}$$

Mit Induktion folgt dann $C_k \equiv B_k \quad \forall k \geq 0$:

<u>IS</u>: Da $C_{k+1}'(x) \overset{1.)}{=} (k+1) C_k(x)$ ist

$$C_{k+1}(x) = \int_0^x (k+1) C_k(t)\,dt + \underbrace{c}_{\in\mathbb{R}\text{ Konstante}} \overset{(IV)}{=} (k+1)\int_0^x B_k(t)\,dt + c$$

$$\Rightarrow 0 \overset{2.)}{=} \int_0^1 C_{k+1}(t)\,dt = (k+1)\int_0^1\int_0^x B_k(t)\,dt + c$$

$$\Rightarrow c = -(k+1)\int_0^1\int_0^x B_k(t)\,dt = A_{k+1}$$

$$\Rightarrow C_{k+1}(x) = (k+1)\int_0^x B_k(t)\,dt + A_{k+1} = B_{k+1}(x).$$

f) folgt wegen $B_{2k+1}(0) \overset{e)}{=} (-1)^{2k+1} B_{2k+1}(1) \overset{c)}{=} (-1) B_{2k+1}(0)$. $\blacksquare$

Lemma: Es gibt eine Folge $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, so dass für $m\in\mathbb{N}$ und alle $g\in C^{2m+2}([0,1])$ gilt:

$$(*) := \left| \int_0^1 g(t)\,dt - \frac{1}{2}\big(g(0)+g(1)\big) - \sum_{k=1}^{m} \frac{A_{2k}}{(2k)!}\big(g^{(2k-1)}(0) - g^{(2k-1)}(1)\big) \right|$$

$$\leq C_m \cdot \| g^{(2m+2)} \|_{[0,1]}$$

Supremumsnorm

Beweis: Mit partieller Integration ist für $k \geq 0$:

$$\int_0^1 \underbrace{B_k}_{= \frac{1}{k+1} B_{k+1}'(t) \text{ L1, a)}} g^{(k)}\,dt = \frac{1}{k+1} B_{k+1}\, g^{(k)} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{k+1} B_{k+1}\, g^{(k+1)}\,dt \qquad \boxed{k}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 g\,dt = \int_0^1 B_0\, g^{(0)}\,dt \overset{\boxed{0}}{=} B_1\, g \Big|_0^1 - \int_0^1 B_1\, g^{(1)}\,dt$$

$$\overset{\boxed{1}}{=} \underbrace{B_1(1)}_{= \frac{1}{2} \text{ L1, d)}} g(1) - \underbrace{B_1(0)}_{= -\frac{1}{2}} g(0) - \frac{1}{2}\left(B_2\, g' \Big|_0^1 - \int_0^1 B_2\, g^{(2)}\,dt \right)$$

$$\overset{\boxed{2}}{=} \frac{1}{2}\big(g(1)+g(0)\big) + \frac{1}{2!}\Big(\overbrace{B_2(0)}^{= A_2 \text{ L1, c)}} g'(0) - \overbrace{B_2(1)}^{= A_2} g'(1) \Big)$$

$$+ \frac{1}{2!}\,\frac{1}{3}\left(\underbrace{B_3\, g^{(2)} \Big|_0^1}_{= 0 \text{ L1, f)}} - \int_0^1 B_3\, g^{(3)}\,dt \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 g(t)\,dt - \frac{1}{2}\cdot\big(g(1)+g(0)\big)$$

$$= \sum_{k=1}^{1} \frac{A_{2k}}{(2k)!}\big(g^{(2k-1)}(0) - g^{(2k-1)}(1)\big) - \frac{1}{3!}\int_0^1 B_3\, g^{(3)}\,dt$$

$$\overset{\boxed{3}}{=} \sum_{k=1}^{1} \text{ —"— } - \frac{1}{3!}\frac{1}{4}\Big(\underbrace{B_4 g^{(3)}\Big|_0^1}_{= A_4(g^{(3)}(1)-g^{(3)}(0))} - \int_0^1 B_4 g^{(4)} dt\Big) \quad \text{L1,c)}$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \frac{A_{2k}}{(2k)!}\left(g^{(2k-1)}(0) - g^{(2k-1)}(1)\right) + \frac{1}{4!}\int_0^1 B_4 g^{(4)} dt$$

$$= \ldots = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_{2k}}{(2k)!}\left(g^{(2k-1)}(0) - g^{(2k-1)}(1)\right) + \frac{1}{(2m)!}\int_0^1 B_{2m} g^{(2m)} dt$$

$$\Rightarrow (*) = \left|\frac{1}{(2m)!}\int_0^1 B_{2m} g^{(2m)} dt\right|$$

$$\overset{\boxed{2m}}{=} \left|\frac{1}{(2m+1)!}\Big(\underbrace{B_{2m+1}}_{=0 \text{ L1,f)}} g^{(2m)}\Big|_0^1 - \int_0^1 \underbrace{B_{2m+1}(t)}_{=\left(\frac{1}{2m+2}\underbrace{(B_{2m+2}(t) - A_{2m+2})}_{=:\tilde{B}_{2m+2}(t)}\right)' \text{ L1,a)}} g^{(2m+1)}(t)\, dt\Big)\right|$$

ähnlich $\boxed{2m+1}$

$$= \frac{1}{(2m+2)!}\left|\underbrace{\tilde{B}_{2m+2}}_{=0 \text{ siehe rechts}} g^{(2m+1)}\Big|_0^1 - \int_0^1 \tilde{B}_{2m+2}\, g^{(2m+2)} dt\right|$$

$$\Rightarrow \tilde{B}_{2m+2}(1) = 0 = \tilde{B}_{2m+2}(0) \quad \text{L1,c)}$$

$$= \frac{1}{(2m+2)!}\left|\int_0^1 \tilde{B}_{2m+2}(t)\, g^{(2m+2)}(t)\, dt\right|$$

$$\leq \|g^{(2m+2)}\|_{[0,1]} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2m+2)!}\int_0^1 |\tilde{B}_{2m+2}(t)|\, dt}_{=: C_m}$$

$\boxtimes$

Sei nun $f \in \mathscr{C}^{2m+2}[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$.

Man setze $0 < h := \frac{b-a}{n}$, $x_\ell := a + \ell \cdot h$

$\varphi_\ell(t) := x_{\ell-1} + t \cdot h$, $\ell = 1, \dots, n$

$M := \| f^{(2m+2)} \|_{[a,b]}$, $g_\ell(t) := f(\varphi_\ell(t))$.

Dann ist

$$g_\ell^{(i)}(t) = h^i \cdot f^{(i)}(\varphi_\ell(t))$$

$$\Rightarrow \| g_\ell^{(2m+2)} \|_{[0,1]} = h^{2m+2} \| f^{(2m+2)}(\varphi_\ell(\cdot)) \|_{[0,1]}$$

$$= h^{2m+2} \| f^{(2m+2)}(\cdot) \|_{[x_{\ell-1}, x_\ell]} \leq h^{2m+2} \cdot M$$

$$\Rightarrow M \cdot C_m \cdot h^{2m+2+1} \geq h \| g_\ell^{(2m+2)} \|_{[0,1]} \cdot C_m$$

$$\overset{\text{Lemma 2}}{\geq} \left| \int_0^1 h\, g_\ell(t)\,dt - \frac{h}{2}(g_\ell(0) + g_\ell(1)) - h \sum_{k=1}^{m} \frac{H_{2k}}{(2k)!} h^{2k-1} \left(f^{(2k-1)}(\varphi_\ell(0)) - f^{(2k-1)}(\varphi_\ell(1)) \right) \right|$$

$$= \left| \int_0^1 \varphi_\ell'(t) \cdot f(\varphi_\ell(t))\,dt \quad - \text{ "} - \quad - \sum \frac{H_{2k} h^{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(x_{\ell-1}) - f^{(2k-1)}(x_\ell) \right) \right|$$

$$= \left| \int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell} f(t)\,dt - \frac{h}{2}\left(f(x_{\ell-1}) + f(x_\ell) \right) - \quad \text{ "} \quad \right|$$

Anders gesagt haben wir

$$\int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell} f(t)\,dt = \frac{h}{2}\left(f(x_{\ell-1}) + f(x_\ell) \right) + \sum_{k=1}^{m} h^{2k} \frac{H_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(x_{\ell-1}) - f^{(2k-1)}(x_\ell) \right)$$

$$+ \mathcal{O}(h^{2m+3})$$

Dies ergibt

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{\ell=1}^{n} \int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell} f(t)\,dt$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \left[\frac{h}{2}\left(f(x_{\ell-1}) + f(x_\ell)\right) + \sum_{k=1}^{m} \text{—''—} + \mathcal{O}\left(h^{2m+3}\right) \right]$$

bezeichnet die summierte Trapezregel

$$= \underbrace{T_f(h)}_{=:\tau_0} + \sum_{k=1}^{m} \frac{h^{2k} A_{2k}}{(2k)!} \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} \left(f^{(2k-1)}(x_{\ell-1}) - f^{(2k-1)}(x_\ell) \right)}_{\text{Teleskopsumme}} + \sum_{\ell=1}^{n} \mathcal{O}\left(h^{2m+3}\right)$$

$$= \tau_0 + \sum_{k=1}^{m} h^{2k} \underbrace{\frac{A_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(b) \right)}_{=:\tau_k} + n \cdot \mathcal{O}\left(h^{2m+3}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} h^{2k} \tau_k + \frac{b-a}{h} \mathcal{O}\left(h^{2m+3}\right)$$

$$= \tau_0 + h^2 \tau_1 + \ldots + h^{2m} \tau_m + \mathcal{O}\left(h^{2m+2}\right)$$