Ordnungsreduktion

Hat man eine Differentialgleichung der Form

(1) $\quad q^{(k)}(t) = F(t, q(t), q^{(1)}(t), \dots, q^{(k-1)}(t)), t \in \mathbb{R}$

gegeben so kann man die neuen Variablen / Funktionen

$$q_1 := q^{(1)}, \dots, q_{k-1} := q^{(k-1)}$$

einführen und (1) in die Form

$$(2) \quad \begin{bmatrix} q(t) \\ q_1(t) \\ \vdots \\ q_{k-1}(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ F(t, q(t), q_1(t), \dots, q_{k-1}(t)) \end{bmatrix}$$

umschreiben.

Satz 1: Sei $F : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^N)^K \to \mathbb{R}^N$ und sei die Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ K-mal stetig differenzierbar.

Man setze $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{NK} \to \mathbb{R}^{NK}$ durch

$$f\left(t, \begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ \vdots \\ \hat{y}_{k-1} \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_{k-1} \\ F(t, \hat{y}_0, \dots, \hat{y}_{k-1}) \end{bmatrix}.$$

und $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{NK}$ durch

(3) $\quad y := \begin{bmatrix} q \\ q^{(1)} \\ \vdots \\ q^{(k-1)} \end{bmatrix}$ $\quad$ (y ist also noch stetig differenzierbar)

fest.

Dann sind äquivalent:

i) $\quad q^{(k)}(t) = F(t, q(t), q^{(1)}(t), \dots, q^{(k-1)}(t)), \quad t \in \mathbb{R}$

ii) $\quad y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in \mathbb{R}$

<u>Beweis:</u> i) $\Rightarrow$ ii) ähnlich der Einleitung

ii) $\Rightarrow$ i) Es gilt also (2)

$$\begin{bmatrix} q(t) \\ q^{(1)}(t) \\ \vdots \\ q^{(k-1)} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} q^{(1)}(t) \\ q^{(2)}(t) \\ \vdots \\ F(t, q(t), q^{(1)}(t), \dots, q^{(k-1)}(t)) \end{bmatrix},$$

worin die letzte Gleichung i) ist. $\boxtimes$

<u>Satz 2:</u> (Picard-Lindelöf) Ist $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und gilt

$$\| f(t, \hat{u}) - f(t, \hat{v}) \|_2 \leq L \cdot \| \hat{u} - \hat{v} \|_2$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $\hat{u}, \hat{v} \in \mathbb{R}^n$ mit einer gewissen Konstante $L \in [0, \infty)$, dann hat das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = \hat{y} \end{cases}$$

für jedes $\hat{y} \in \mathbb{R}^M$ eine eindeutige stetig differenzierbare Lösung y.

<u>ohne Beweis:</u>

<u>Korollar:</u> Ist $F : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^N)^K \to \mathbb{R}^N$ stetig und gibt es eine Lipschitz-Konstante $\mathcal{L} \in [0, \infty)$ mit

$$\| F(t, \hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{K-1}) - F(t, \hat{v}_0, \dots, \hat{v}_{K-1}) \|_2^2 \leq \mathcal{L} \sum_{i=0}^{K-1} \| \hat{u}_i - \hat{v}_i \|_2^2$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{K-1}, \hat{v}_0, \dots, \hat{v}_{K-1} \in \mathbb{R}^N$, dann hat das AWP

$$\begin{cases} q^{(K)}(t) = F(t, q(t), q^{(1)}(t), \dots, q^{(K-1)}(t)), & t \in \mathbb{R} \\ q(0) = \hat{q}_0, \; q^{(1)}(0) = \hat{q}_1, \dots, q^{(K-1)}(0) = \hat{q}_{K-1} \end{cases}$$

für alle $\hat{q}_0, \dots, \hat{q}_{K-1} \in \mathbb{R}^N$ eine eindeutige ~~Lösung~~ K-mal stetig differenzierbare Lösung.

<u>Beweis:</u> Seien $\hat{q}_0, \dots, \hat{q}_{K-1} \in \mathbb{R}^N$ fest vorgegeben.

Definiert man f wie in Satz 1 dann ist

$$\left\| f\left(t, \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \vdots \\ \hat{u}_{K-1} \end{bmatrix}\right) - f\left(t, \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \vdots \\ \hat{v}_{K-1} \end{bmatrix}\right) \right\|^2$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_{k-1} \\ F(t, \hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{k-1}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{v}_{k-1} \\ F(t, \hat{v}_0, \dots, \hat{v}_{k-1}) \end{bmatrix} \right\|^2$$

$$= \|\hat{u}_1 - \hat{v}_1\|^2 + \dots + \|\hat{u}_{k-1} - \hat{v}_{k-1}\|^2 + \|F(t, \hat{u}_0, \dots) - F(t, \hat{v}_0, \dots)\|^2$$

$$\leq \underbrace{\mathcal{L}}_{\leq (1+\mathcal{L})} \|\hat{u}_0 - \hat{v}_0\|^2 + (1+\mathcal{L}) \|\hat{u}_1 - \hat{v}_1\|^2 + \dots + (1+\mathcal{L}) \|\hat{u}_{k-1} - \hat{v}_{k-1}\|^2$$

$$\leq (1+\mathcal{L}) \sum_{i=0}^{k-1} \|\hat{u}_i - \hat{v}_i\|^2 = (1+\mathcal{L}) \left\| \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \vdots \\ \hat{u}_{k-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \vdots \\ \hat{v}_{k-1} \end{bmatrix} \right\|^2 ,$$

d.h. die Vorraussetzungen aus Satz 2 sind erfüllt (mit $L = 1 + \mathcal{L}$). Es gibt also (mit Satz 1) genau ein y von der Form (3), welches das AWP bestehend aus (2) und

$$y(0) = \begin{bmatrix} \hat{q}_0 \\ \vdots \\ \hat{q}_{k-1} \end{bmatrix} \quad \text{löst.}$$

$\Rightarrow \exists!\ q$ mit $q(0) = \hat{q}_0, \dots, q^{(k-1)}(0) = \hat{q}_{k-1}$

Da y stetig differenzierbar ist, ist auch jeder Eintrag von y stetig differenzierbar, insbesondere der Letzte. Dies ist

$$\left(q^{(k-1)}\right)'(t), \text{ d.h. } q \text{ ist } k\text{-mal}$$

stetig differenzierbar.