**Technische Universität Berlin** **WS 2011/2012**
**Fakultät II – Institut f. Mathematik**
Dozent: Prof. Dr. M. Scheutzow
Assistent: M. Wilke Berenguer

Ausgabe: Mi 01.02.2011
Abgabe: Mi 08.02.2011

# 14. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 2“

## Der Wienerprozess

## Dies ist das letzte Blatt des Semesters!

---

**Gesamtpunktzahl: 20 Punkte**

**1. Hausaufgabe:** **5 Punkte**

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein reeller Prozess mit den Eigenschaften:

(i) $(X_t)_{t\geq 0}$ hat stetige Pfade,

(ii) unabhängige Zuwächse und

(iii) $\forall 0 \leq s < t < \infty$ gilt $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

Zeigen Sie, dass $X$ ein Wienerprozess ist. (Weisen Sie die Definition eines Wienerprozesses aus der Vorlesung nach.)
(cf. Bemerkung 7.6)

**2. Hausaufgabe:** (Momente Brownscher Funktionale) **5 Punkte**

Sei $(W)_{0\leq t\leq 1}$ ein Wienerprozess. Berechnen Sie die Erwartungswerte von

(i) $W_{0,5}$,

(ii) $W_{0,2}^6$,

(iii) $e^{g(W_1 - W_{0,5})}$

(iv) $\max_{0\leq t\leq 1}(gW_t)$

(v) $|W_1|$

wobei $g$ ihre Gruppennummer sei.

**3. Hausaufgabe:** Brownsche Brücke **5 Punkte**

Es sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wienerprozess.
Man zeige, dass $(B_t)_{1\geq t\geq 0}$, definiert durch $B_t := W_t - tW_1$ ein Gaußprozess auf $[0,1]$ ist, sodass für alle $s, t \geq 0$ $\mathbb{E}[B_t] = 0$ und $\mathrm{cov}(B_s, B_t) = (s \wedge t) \cdot (1 - s \vee t)$.

**4. Hausaufgabe:** Monotonie **5 Punkte**

Es sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wienerprozess. Zeigen Sie: Fast sicher gilt für alle $0 < a < b < \infty$, dass $W$ nicht monoton auf dem Interval $[a, b]$ ist.
**Hinweis**: Für $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ betrachten Sie die Vorzeichen von $W_{a_{i+1}} - W_{a_i}$ unter der Annahme, dass $W$ monoton auf $[a, b]$ ist.