Technische Universität Berlin **WS 2011/2012**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Dozent: Prof. Dr. M. Scheutzow
Assistent: M. Wilke Berenguer
Ausgabe: Mi 02.12.2011
Abgabe: Mi 09.11.2011

3. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 2“
Markoff-Kerne, Fubini-Tonelli und Dichten

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

Die Hausaufgaben sind ab jetzt ausschließlich in Gruppen von *genau* zwei Studierenden abzugeben!
Auf der ersten Seite der Abgabe des 3. Hausaufgabenblattes sind *leserlich*
NACHNAME, VORNAME, MATRIKELNUMMER UND STUDIENGANG
***beider* Studierender dieser Gruppe anzugeben.**

1. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Führen Sie den Beweis von Proposition 1.64 a) aus dem Skript detailliert aus!

2. Hausaufgabe: Markoff-Kerne **5 Punkte**
Es sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 2$. Wir definieren für $a, b, c \in I := \{1, \dots, N\}$

$$p(a,b,c) := \begin{cases} 1 & : \ a = b = c \\ \frac{1}{N-2} & : \ a,\ b,\ c \text{ sind paarweise verschieden} \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}$$

sowie für jedes $n \geq 2$ und $i_1, \dots, i_{n+1} \in I$ die Abbildung

$$K_n : ((i_1, \dots, i_n), i_{n+1}) \mapsto p(i_{n-1}, i_n, i_{n+1}).$$

Zeigen Sie, dass K_n sich als Markoff-Kern auffassen lässt. Geben Sie hierzu auch die entsprechenden messbaren Räume an!

3. Hausaufgabe: Fubini-Tonelli **5 Punkte**
Sei f eine nicht-negative messbare Funktion, definiert auf einem σ-endlichen Maßraum $(E, \mathcal{E}, \mu)$.
Zeigen Sie mit dem Satz von Fubini-Tonelli folgende Gleichung:

$$\int_E f d\mu = \int_{(0,\infty)} \mu(f > t) d\lambda(t).$$

Bemerkung: Der Satz von Fubini-Tonelli gilt auch für Produkte von σ-endlichen Maßen.

4. Hausaufgabe: Radon-Nikodym **5 Punkte**
Auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{F})$ seien zwei endliche Maße μ und ν gegeben mit $\nu \leq \mu$ (d.h. $\nu(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{F}$). Beweise die Existenz einer Dichte f des Maßes ν bezüglich μ mit $0 \leq f(\omega) \leq 1$ für alle $\omega \in \Omega$.