Technische Universität Berlin **WS 2011/2012**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Dozent: Prof. Dr. M. Scheutzow
Assistent: M. Wilke Berenguer

Ausgabe: Mi 07.12.2011
Abgabe: Mi 14.12.2011

8. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 2“

Martingale 2

Mittwoch 14.12.2011: FiMa1-StoMo-VerMa-WT2 Weihnachtsumtrunk ab 18Uhr im Cafe Hardenberg

---

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe: diskretes stochastisches Integral **3 Punkte**
Beweisen Sie Proposition 4.23.

2. Hausaufgabe: Submartingalungleichungen **5 Punkte**
Beweisen Sie folgende Ungleichungen:

(i) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein nichtnegatives Submartingal und $p \geq 1, x > 0$. Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}_0$:
$$\mathbb{P}\left(\max_{k\leq N} X_k \geq x\right) \leq \frac{1}{x^p}\mathbb{E}[X_N^p];$$

(ii) Betrachten Sie eine Folge $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Y_1] = 0, \mathbb{E}[Y_1^2] < \infty$ und definieren Sie $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $S_n := \sum_{i=1}^n Y_i$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Sei außerdem $x > 0$. Dann gilt die *Kolmogorovsche Ungleichung* für alle $N \in \mathbb{N}_0$:
$$\mathbb{P}\left(\max_{k\leq N} |S_k| \geq x\right) \leq \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_N)}{x^2}.$$

3. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein nicht-negatives Martingal auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, sodass $\tau(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid X_n(\omega) = 0\} < c \in \mathbb{R}$ für alle $\omega \in \Omega$.
Zeigen Sie folgende Aussage: Fast sicher gilt für alle $n \geq \tau$: $X_n = 0$.
Gilt die Aussage auch für Sub- bzw. Supermartingale (ohne Beweis)?

4. Hausaufgabe: **3 Punkte**
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal bzgl. der Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $N \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $\mathbb{E}[X_N] \geq \mathbb{E}[X_0]$.
Zeigen Sie dass dann für alle $n \in \{0, \ldots, N\}$ gilt: $X_n = \mathbb{E}[X_N \mid \mathcal{F}_n]$ f.s..

5. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Seien $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zwei monoton wachsende Funktionen mit $F(0) = G(0) = 0$. Finden Sie ein Submartingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\mathbb{E}[X_n] = F(n)$ und $\mathrm{Var}[X_n] = G(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.