Numerische Mathematik

Lösungen

1. Für den ganzzahligen Anteil einer Zahl ermittelt man die jeweilige p–adische Darstellung fortgesetzte durch Division mit Rest nach p und Übergang zum Rest. Für den Nachkommaanteil bekommt man die entsprechende Darstellung durch fortgesetzte Multiplikation mit p und Übergang zum Rest. Wir illustrieren dies an den vier Zahlen $2.75, 0.1, 1/3, 12.125$.
   Zunächst eine ganze Zahl:

$$\left.\begin{aligned} 275 &= 137\cdot 2 + \mathbf{1} \\ 137 &= 68\cdot 2 + \mathbf{1} \\ 68 &= 34\cdot 2 + \mathbf{0} \\ 34 &= 17\cdot 2 + \mathbf{0} \\ 17 &= 8\cdot 2 + \mathbf{1} \\ 8 &= 4\cdot 2 + \mathbf{0} \\ 4 &= 2\cdot 2 + \mathbf{0} \\ 2 &= 1\cdot 2 + \mathbf{0} \\ 1 &= 0\cdot 2 + \mathbf{1} \end{aligned}\right\} \longrightarrow (100010011)_2$$

$$\left.\begin{aligned} 275 &= 17\cdot 16 + \mathbf{3} \\ 17 &= 1\cdot 16 + \mathbf{1} \\ 1 &= 0\cdot 16 + \mathbf{1} \end{aligned}\right\} \longrightarrow (113)_{16}$$

$$\left.\begin{aligned} 275 &= 22\cdot 12 + \mathbf{11} \\ 22 &= 1\cdot 12 + \mathbf{10} \\ 1 &= 0\cdot 12 + \mathbf{1} \end{aligned}\right\} \longrightarrow (1AB)_{12}$$

Als nächstes eine Zahl < 1:

$$\left.\begin{aligned} 0.1\cdot 2 &= \mathbf{0} + 0.2 \\ 0.2\cdot 2 &= \mathbf{0} + 0.4 \\ 0.4\cdot 2 &= \mathbf{0} + 0.8 \\ 0.8\cdot 2 &= \mathbf{1} + 0.6 \\ 0.6\cdot 2 &= \mathbf{1} + 0.2 \\ 0.2\cdot 2 &= \mathbf{0} + 0.4 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \longrightarrow (0.0\overline{0011})_2$$

$$\left.\begin{aligned} 0.1\cdot 16 &= \mathbf{1} + 0.6 \\ 0.6\cdot 16 &= \mathbf{9} + 0.6 \\ 0.6\cdot 16 &= \mathbf{9} + 0.6 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \longrightarrow (0.1\overline{9})_{16}$$

$$\left.\begin{aligned} 0.1\cdot 12 &= \mathbf{1} + 0.2 \\ 0.2\cdot 12 &= \mathbf{2} + 0.4 \\ 0.4\cdot 12 &= \mathbf{4} + 0.8 \\ 0.8\cdot 12 &= \mathbf{9} + 0.6 \\ 0.6\cdot 12 &= \mathbf{7} + 0.2 \\ 0.2\cdot 12 &= \mathbf{2} + 0.4 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \longrightarrow (0.1\overline{2497})_{12}$$

Man beachte, daß die 'glatte' Zahl 0.1 in keinem dieser drei Systeme abbrechend ist. Insbesondere nicht im Dualsystem, welches auf Computern verwendet wird!

$$\left.\begin{array}{rcl} 1/3 \cdot 2 = \mathbf{0} & + & 2/3 \\ 2/3 \cdot 2 = \mathbf{1} & + & 1/3 \\ 1/3 \cdot 2 = \mathbf{0} & + & 2/3 \\ \vdots & & \end{array}\right\} \longrightarrow (0.\overline{01})_2$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 1/3 \cdot 16 = \mathbf{5} & + & 1/3 \\ 1/3 \cdot 16 = \mathbf{5} & + & 1/3 \\ \vdots & & \end{array}\right\} \longrightarrow (0.\overline{5})_{16}$$

$$1/3 \cdot 12 = \mathbf{4} \quad \} \longrightarrow (0.4)_{12}$$

Die 'krumme' Zahl 1/3 läßt sich exakt zur Basis 12 darstellen! Zum Schluß noch eine Zahl mit Vor– und Nachkommaanteil. Wir betrachten beides getrennt.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 12 = 6 \cdot 2 + \ \mathbf{0} \\ 6 = 3 \cdot 2 + \ \mathbf{0} \\ 3 = 1 \cdot 2 + \ \mathbf{1} \\ 1 = 0 \cdot 2 + \ \mathbf{1} \end{array}\right\} \longrightarrow (1100)_2 \\ \left.\begin{array}{l} 0.125 \cdot 2 = \mathbf{0} \ + \ 0.25 \\ 0.25 \ \cdot 2 = \mathbf{0} \ + \ 0.5 \\ 0.5 \ \ \cdot 2 = \mathbf{1} \end{array}\right\} \longrightarrow (0.001)_2 \end{array}\right\} \longrightarrow (1100.001)_2$$

$$\left.\begin{array}{l} 12 = 0 \cdot 16 + \ \mathbf{12} \ \} \longrightarrow (C)_{16} \\ 0.125 \cdot 16 = \mathbf{2} \quad \} \longrightarrow (0.2)_2 \end{array}\right\} \longrightarrow (C.2)_{16}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 12 = 1 \cdot 12 + \ \mathbf{0} \\ 1 = 0 \cdot 12 + \ \mathbf{1} \end{array}\right\} \longrightarrow (10)_{12} \\ \left.\begin{array}{l} 0.125 \cdot 12 = \mathbf{1} \ + \ 0.5 \\ 0.5 \ \ \cdot 12 = \mathbf{6} \end{array}\right\} \longrightarrow (0.16)_{12} \end{array}\right\} \longrightarrow (10.16)_{12}$$

2. $B_i(t)$ ist definiert als

$$B_i(t) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (t - t_{i-2})^3 & t \in [t_{i-2}, t_{i-1}) \\ h^3 + 3h^2(t - t_{i-1}) + 3h(t - t_{i-1})^2 - 3(t - t_{i-1})^3 & t \in [t_{i-1}, t_i) \\ h^3 + 3h^2(t_{i+1} - t) + 3h(t_{i+1} - t)^2 - 3(t_{i+1} - t)^3 & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ (t_{i+2} - t)^3 & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Wir erhalten hieraus

$$B_i'(t) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} 3(t - t_{i-2})^2 & t \in [t_{i-2}, t_{i-1}) \\ 3h^2 + 6h(t - t_{i-1}) - 9(t - t_{i-1})^2 & t \in [t_{i-1}, t_i) \\ -3h^2 - 6h(t_{i+1} - t) + 9(t_{i+1} - t)^2 & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ -3(t_{i+2} - t)^2 & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$B_i''(t) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} 6(t - t_{i-2}) & t \in [t_{i-2}, t_{i-1}) \\ 6h - 18(t - t_{i-1}) & t \in [t_{i-1}, t_i) \\ 6h - 18(t_{i+1} - t) & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 6(t_{i+2} - t) & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch Einsetzen der Werte $x_{i-2}, \ldots, x_{i+2}$ an den entsprechenden Intervallgrenzen sehen wir, dass B_i zweimal stetig differenzierbar ist. Die dritte Ableitung ist übrigens unstetig.

b) $B_i(t)$ lebt nur auf dem Intervall $[t_{i-2}, t_{i+2}]$ hat damit also einen lokalen Träger der Länge $4h$, also eins größer als der Polynomgrad der stückweisen Polynome. Man kann zeigen, dass dies allgemein erreichbar ist. An den einzelnen Schnittstellen hat B_i die Werte $0, 1, 4, 1, 0$. B_i sieht glockenförmig aus.

c) Die Aufgabe $p(t_i) = f_i, i = 0, \ldots, n,\ p''(t_0) = 0 = p''(t_n)$ führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} B''_{-1}(t_0) & B''_0(t_0) & \cdots & B''_n(t_0) & B''_{n+1}(t_0) \\ B_{-1}(t_0) & B_0(t_0) & \cdots & B_n(t_0) & B_{n+1}(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ B_{-1}(t_n) & B_0(t_n) & \cdots & B_n(t_n) & B_{n+1}(t_n) \\ B''_{-1}(t_n) & B''_0(t_n) & \cdots & B''_n(t_n) & B''_{n+1}(t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ \vdots \\ a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_0 \\ \vdots \\ f_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die B_i lokalen Träger haben reduziert sich das Gleichungssystem gewaltig.

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{h^2} & -\frac{12}{h^2} & \frac{6}{h^2} & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & \frac{6}{h^2} & -\frac{12}{h^2} & \frac{6}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ \vdots \\ a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_0 \\ \vdots \\ f_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir fügen noch einen Reduktionsschritt an und erhalten

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} \frac{6}{h^2} & -\frac{12}{h^2} & \frac{6}{h^2} & & & \\ \hline 0 & 6 & 0 & & & \\ & 1 & 4 & \ddots & & \\ & & \ddots & 4 & 1 & \\ & & & 0 & 6 & 0 \\ \hline & & & \frac{6}{h^2} & -\frac{12}{h^2} & \frac{6}{h^2} \end{array}\right) \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ \vdots \\ a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_0 \\ \vdots \\ f_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix in den Zeilen und Spalten 2 bis $n+2$ ist strikt diagonaldominant, also nichtsingulaär. Das Lösen eines solchen Systems kostet $8(n+1)$ flops . Das Auswerten von $p(x)$ kostet eine konstante Anzahl Operationen, weil gleichzeitig höchstens 4 B_i's von Null verschieden sein können. Durch Nachrechnen kann man leicht verifizieren, dass es maximal 31 flops sind.

d) Nehmen wir als abgewandelte Aufgabe die Randbedingungen $p'(t_0) = f'_0$, $p'(t_n) = f'_n$ statt $p''(t_0) = 0 = p''(t_n)$ hinzu, so ändern sich nur die erste und letzte Zeile der Matrix und der rechten Seite.

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{h} & 0 & \frac{3}{h} & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & -\frac{3}{h} & 0 & \frac{3}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ \vdots \\ a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_0 \\ f_0 \\ \vdots \\ f_n \\ f'_n \end{pmatrix}$$

Auch hier machen wir ein Reduktionsschritt. Wir subtrahieren von der erste Zeile $\frac{3}{h}$ mal die zweite Zeile um den Eintrag in Position (1,3) zu eliminieren. Anschließend skalieren wir die erste Zeile mit -1 und subtrahieren von der zweiten Zeile das $\frac{h}{6}$–fache der ersten Zeile um den Eintrag in Position (2,1) loszuwerden. Analog behandeln wir die letzten beiden Zeilen. Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} \frac{6}{h} & \frac{12}{h} & & & & \\ \hline 0 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & \ddots & & \\ & & \ddots & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 0 \\ \hline & & & & \frac{12}{h} & \frac{6}{h} \end{array}\right) \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ \vdots \\ a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3f_0}{h} - f'_0 \\ f_0 \\ \vdots \\ f_n \\ \frac{3f_n}{h} + f'_n \end{pmatrix}$$

Die Diagonaldominanzüberlegungen aus c) lassen sich wieder übertragen. Die Interpolationsaufgaben in c) nennt man natürliche Splineinterpolation und die Interpolationsaufgabe in d) nennt man vollständige Splineinterpolation. Eine dritte Klasse sei hier noch genannt. Für den Fall, dass $f_0 = f_n$ ist, kann man auch periodische Splineinterpolation betrachten. Hier lauten die zusätzlichen Randbedingungen $p'(t_0) = p'(t_n)$, $p''(t_0) = p''(t_n)$.