Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin, Fakultät II,
Institut für Mathematik, Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2013, erste Hälfte

Aufgabenzettel 1

Aufgabe 1 (6 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$E_n := \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n}\right] n \quad .$$

die $n \times n$ – Einheitsmatrix. Betrachte die Menge

$$O(n, \mathbb{R}) := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \;\middle|\; A \cdot A^{\intercal} = E_n \right\}$$

der *orthogonalen Matrizen*. Es bezeichnet hier $A^{\intercal}$ die Transponierte der Matrix A. Zeige, dass $O(n, \mathbb{R})$ eine Untergruppe von $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte). Zeige, dass jede Untergruppe G von $(\mathbb{Z}, +)$ zyklisch ist, d.h. G wird von einem Element erzeugt.

Für die folgenden Aufgaben sei G eine endliche Gruppe mit neutralem Element e.

Aufgabe 3 (14 Punkte). Sei G zyklisch.

(a) Zeige: Für jedes $g \in G$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g^n = e$.

(b) Angenommen, $H \subseteq G$ ist eine Teilmenge mit der Eigenschaft, dass $HH \subseteq H$ (mit anderen Worten: Für alle $g, h \in H$ gilt $gh \in H$). Zeige, dass H eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 4 (14 Punkte). Sei G abelsch.

(a) Zeige, dass $\prod_{g \in G} g^2 = e$.

(b) Finde ein Beispiel für eine solche Gruppe mit $\prod_{g \in G} g \neq e$.

Aufgabe 5 (8 Punkte). Angenommen, jedes Element von G sei selbstinvers. Mit anderen Worten, es gelte $g^2 = e$ für alle $g \in G$. Zeige, dass G abelsch ist.

Die Abgabe erfolgt bis **Mittwoch**, den **30.10.2013** in der Übung. Gutes Gelingen!