Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin, Fakultät II,
Institut für Mathematik, Sekretariat MA 3-2

# Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2013, erste Hälfte

## Aufgabenzettel 2

**Aufgabe 1 (10 Punkte).** Betrachte die Aktion der Gruppe

$$G := \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) := \{\, g \in O(3,\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1 \,\}$$

auf $X = \mathbb{R}^3$ durch Matrix-Vektor-Multiplikation.

(a) Was sind die $G$-Bahnen in $X$?

(b) Was ist der Stabilisator des ersten kanonischen Basisvektors $e_1 = (1,0,0)^\intercal$?

**Aufgabe 2 (10 Punkte).**

(a) Bestimme das Zentrum der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ aller Permutationen von $n$ Elementen.

(b) Sei $\Bbbk$ ein Körper und $V$ ein endlich-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum. Bestimme das Zentrum der Gruppe $\mathrm{Gl}(V)$ aller linearer Automorphismen von $V$.

**Aufgabe 3 (10 Punkte).** Sei $G$ eine Gruppe und $S \leq G$ eine Untergruppe. Betrachte die Menge

$$N_S := \left\{ g \in G \;\middle|\; gSg^{-1} = S \right\}.$$

Man nennt $N_S$ den *Normalisator* von $S$ in $G$.

(a) Zeige, dass $N_S$ eine Gruppe ist, welche $S$ als Normalteiler enthält.

(b) Sei $H$ eine Untergruppe von $G$, welche $S$ als Normalteiler enthält.
Zeige, dass $H \subseteq N_S$.

Betrachte nun den sogenannten *Zentralisator* von $S$, definiert als

$$Z_S := \{\, g \in G \mid \forall s \in S\colon gs = sg \,\}.$$

(c) Zeige, dass $Z_S$ ein Normalteiler in $N_S$ ist.

(d) Zeige, dass ein injektiver Gruppenhomomorphismus $f\colon\ N_S/Z_S \to \mathrm{Aut}(S)$ existiert.

**Aufgabe 4 (10 Punkte).** Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper und $q = |\mathbb{F}|$ die Anzahl seiner Elemente. Bestimme die Anzahl der $d$-dimensionalen Teilräume von $\mathbb{F}^n$. Mit anderen Worten, betrachte

$$\mathrm{Gr}_d(\mathbb{F}^n) := \{\, U \subseteq \mathbb{F}^n \mid U \text{ Untervektorraum mit } \dim(U) = d \,\}$$

und bestimme $|\mathrm{Gr}_d(\mathbb{F}^n)|$. Betrachte dazu die naheliegende Wirkung von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F})$ auf der Menge $\mathrm{Gr}_d(\mathbb{F}^n)$.

---

Die Abgabe erfolgt bis **Mittwoch**, den **06.11.2013** in der Übung. Gutes Gelingen!

**Aufgabe 5 (10 Punkte).**

(a) Zeige den folgenden Satz von Burnside: Seien $G$ eine endliche Gruppe und $X$ eine endliche Menge, auf der $G$ wirkt. Für Elemente $g \in G$ bezeichnen wir mit $X^g := \{ x \in X \mid g.x = x \}$ die Menge aller Fixpunkte von $g$. Dann ist die Anzahl der Bahnen von $G$ gleich

$$\frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X^g| \,.$$

*Hinweis.* Betrachte für den Beweis die Menge $R = \{ (g, x) \in G \times X \mid g.x = x \}$ und zähle diese auf zwei Arten ab.

(b) Betrachte die Wirkung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ auf $[n] = \{ 1, \ldots, n \}$. Was ist der Erwartungswert der Anzahl Fixpunkte einer uniform zufällig gewählten Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$?