Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin, Fakultät II,
Institut für Mathematik, Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2013, erste Hälfte

Aufgabenzettel 3

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei $C_n = \langle g \rangle$ eine endliche, zyklische Gruppe der Ordnung n. Unter einem *primitiven Element* von C_n versteht man ein $h \in C_n$ mit $C_n = \langle h \rangle$. Die Anzahl der primitiven Elemente von C_n wird mit $\phi(n)$ bezeichnet (die *Eulersche Phi-Funktion*).

(a) Unter welcher Bedingung an $k \in [n]$ ist g^k ein primitives Element?

(b) Entwickle eine Formel für $\phi(p)$, wenn p eine Primzahl ist.

(c) Berechne $\phi(15)$.

(d) Seien $T = (\mathrm{c}, \mathrm{c}^\sharp, \mathrm{d}, \mathrm{d}^\sharp, \mathrm{e}, \mathrm{f}, \mathrm{f}^\sharp, \mathrm{g}, \mathrm{g}^\sharp, \mathrm{a}, \mathrm{a}^\sharp, \mathrm{h})$ die verschiedenen Töne, die man auf einer Klaviertastatur spielen kann.

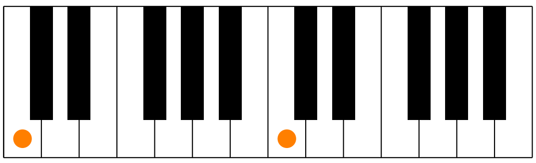

Abbildung 1: Klaviertastatur mit Markierung bei c

Ein verallgemeinerter Quintenzirkel sei definiert als unendliche Folge von Tönen, beginnend mit c, in welcher aufeinanderfolgende Töne immer den gleichen Intervallabstand haben. Welche verallgemeinerten Quintenzirkel gibt es, in denen jeder Ton vorkommt?

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe.

(a) Zeige, dass $Z(G) \trianglelefteq G$.

(b) Für $g \in G$ betrachte die Konjugationsabbildung $\iota_g \in \mathrm{Aut}(G)$, welche durch $\iota_g(x) := gxg^{-1}$ gegeben ist. Wir nennen $\mathrm{Inn}(G) = \{\, \iota_g \mid g \in G \,\}$ die *inneren Automorphismen* von G. Zeige, dass $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$.

(c) Zeige, dass $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe und $Z(G)$ das Zentrum von G. Zeige: Wenn $G/Z(G)$ zyklisch ist, so ist G abelsch.

Die Abgabe erfolgt bis **Mittwoch**, den **13.11.2013** in der Übung. Gutes Gelingen!

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei $\Bbbk$ ein Körper mit mindestens drei Elementen, $G = \mathrm{Gl}(n, \Bbbk)$ und $T \leq G$ die Untergruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen. Wir bezeichnen mit $N_G(T)$ den Normalisator von T in G. Zeige:

(a) $N_G(T)$ besteht aus allen invertierbaren Matrizen, bei denen in jeder Spalte genau ein Element von 0 verschieden ist.

(b) $N_G(T)/T$ ist isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Sei X eine endliche Menge mit $n = |X|$ Elementen und $\pi \in \mathfrak{S}_X$. Sei $H := \langle \pi \rangle$ die von π erzeugte Untergruppe. Betrachte die kanonische Wirkung von H auf X, welche durch $h.x := h(x)$ gegeben ist. Sei m die Anzahl der H-Bahnen dieser Wirkung. Zeige: $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{n-m}$.