

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG ALGEBRA 1

Wintersemester 2013, erste Hälfte

Aufgabenzettel 4

Aufgabe 1 (10 Punkte). Seien G_1, \dots, G_r Gruppen und $N_i \trianglelefteq G_i$ für alle $i \in [r]$ ein Normalteiler. Zeige:

- (a) $N := N_1 \times \dots \times N_r$ ist ein Normalteiler von $G := G_1 \times \dots \times G_r$.
- (b) Es gilt $G/N \cong (G_1/N_1) \times \dots \times (G_r/N_r)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe, $N \trianglelefteq G$ und $H \leq G$. Es gelte weiterhin $H \cap N = \{1\}$ und $|G| = |N| \cdot |H|$. Zeige, dass $G = HN$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei $\mathcal{S}_p(G)$ die Menge der p -Sylow Untergruppen einer Gruppe G und $H \in \mathcal{S}_p(G)$. Zeige, dass $|\mathcal{S}_p(G)| = (G : N_G(H))$ gilt.

Im Folgenden sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und \mathbb{F}_p der Körper mit p Elementen. Wir betrachten die Gruppe

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_p^{2 \times 2} \mid \det(g) = ad - bc = 1 \right\}. \quad (\dagger)$$

Aufgabe 4 (10 Punkte).

- (a) Beweise, dass $|\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)| = p^3 - p$. Verwende dazu, dass die Determinantenabbildung $\det : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p) \rightarrow \mathbb{F}_p^\times$ ein Gruppenhomomorphismus ist.
- (b) Zeige, dass \mathfrak{S}_4 keinen Normalteiler der Ordnung 2 enthält.
- (c) Zeige, dass $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_3)$ und \mathfrak{S}_4 zwar die gleiche Anzahl Elemente haben, jedoch als Gruppen nicht isomorph sind.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Betrachte die Untergruppe

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_p^{2 \times 2} \mid x \in \mathbb{F}_p \right\} \leq \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p) =: G$$

- (a) Zeige, dass H eine p -Sylow Untergruppe von G ist.
- (b) Bestimme die Anzahl der p -Sylow Untergruppen von G .