Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin, Fakultät II,
Institut für Mathematik, Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2013, erste Hälfte

Aufgabenzettel 5

Aufgabe 1 (10 Punkte). Zeige:

(a) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{k})$ ist semidirektes Produkt von $\mathrm{SL}(n, \mathbb{k})$ und $\mathbb{k}^\times$, wobei $\mathbb{k}$ ein Körper ist.

(b) $\mathfrak{A}_4$ ist semidirektes Produkt von $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_3$, wobei $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe und seien $p_1, \ldots, p_r$ die Primteiler von $|G|$. Angenommen, für alle $i \in [r]$ existiert genau eine p_i-Sylow-Untergruppe G_i von G. Beweise, dass G das interne direkte Produkt der G_i ist. Eine Aufgabe des letzten Aufgabenzettels kann dabei nützlich sein.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Zeige: Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 56.

Hinweis. Man überlege sich, dass $s_2 = 1$ falls $s_7 = 8$.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Zeige, dass jede abelsche Gruppe auflösbar ist.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Zeige, dass die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$ von der Menge aller 3-Zykel erzeugt wird.

Die Abgabe erfolgt bis **Mittwoch**, den **27.11.2013** in der Übung. Gutes Gelingen!