Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin, Fakultät II,
Institut für Mathematik, Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2013, erste Hälfte

Aufgabenzettel 6

Aufgabe 1 (8 Punkte). Sei G eine Gruppe und $H \trianglelefteq G$. Zeige, dass G genau dann auflösbar ist, wenn sowohl H als auch G/H auflösbar sind.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe. Zeige:

(a) Wenn $H \trianglelefteq G$ und $K \trianglelefteq G$ zwei auflösbare Normalteiler sind, so ist HK ein auflösbarer Normalteiler von G.

(b) Es gibt einen eindeutig bestimmten, größten, auflösbaren Normalteiler G_+ von G. Dieser ist invariant unter allen Automorphismen von G *[Das heißt: Für alle* $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ *gilt* $\phi(G_+) \subseteq G_+$*]*.

Die folgende Bonusaufgabe ist nicht notwendig, um volle Punktzahl bei der Aufgabe zu erreichen:

(∗) Ist für die Aussagen wichtig, dass G eine *endliche* Gruppe ist?

Aufgabe 3 (5+5+2 Punkte). Die *Kommutatoruntergruppe* $[G, G]$ einer Gruppe G ist definiert als die Untergruppe, welche von allen *Kommutatoren* $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$ für $g, h \in G$ erzeugt wird. Zeige:

(a) $[G, G]$ ist ein Normalteiler von G und $G/[G, G]$ ist abelsch.

(b) Für alle $N \trianglelefteq G$ mit abelscher Faktorgruppe G/N gilt $[G, G] \leq N$.

Definiere nun rekursiv $D^0G := G$ und $D^{i+1}G := [D^iG, D^iG]$. Zeige:

(c) G ist genau dann auflösbar, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $D^nG = \{ 1 \}$ gibt.

Aufgabe 4 (4+4 Punkte). Sei $n \geq 5$.

(a) Beweise, dass $\mathfrak{A}_n$ der einzige nichttriviale Normalteiler von $\mathfrak{S}_n$ ist.

(b) Berechne $[\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_n]$ und $[\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_n]$.

Aufgabe 5 (12 Punkte). Es sei $G := \mathrm{GL}(n, \Bbbk)$ und $B \leq G$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen, also

$$B = \left\{ g = (g_{ij})_{i,j \in [n]} \in \mathrm{GL}(n, \Bbbk) \;\middle|\; \forall j < i \colon g_{ij} = 0 \right\}.$$

Zeige, dass B auflösbar ist.

Die Abgabe erfolgt bis **Mittwoch**, den **4.12.2013** in der Übung. Gutes Gelingen!