Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin, Fakultät II,
Institut für Mathematik, Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2013, zweite Hälfte

Aufgabenzettel 8

Aufgabe 1 (4 Punkte). Definiere $\varphi(n) := |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$, die *Eulersche Phi-Funktion*. Zeige, dass für Primzahlen $p \in \mathbb{Z}$ die Formel $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ gilt.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte). Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen.

(a) Zeige, dass für ein Ideal $J \subseteq B$ auch das Urbild $\phi^{-1}(J)$ ein Ideal von A ist.

(b) Welche Eigenschaft muss ϕ haben, damit für ein Ideal $I \subseteq A$ auch $\phi(I)$ ein Ideal von B ist?

Aufgabe 3 (6 Punkte). Sei X eine Unbestimmte über einem Körper $\mathbb{k}$ und Y eine Unbestimmte über dem Integritätsbereich $\mathbb{k}[X]$. Zeige, dass $\mathbb{k}[X,Y] := \mathbb{k}[X][Y]$ kein Hauptidealring ist.

Aufgabe 4 (12 Punkte). Sei A ein kommutativer Ring und $P \subseteq A$ ein Primideal.

(a) Zeige, dass $PA[X] := (\{pf \mid p \in P, f \in A[X]\})$, das von P in $A[X]$ erzeugte Ideal, ebenfalls prim ist.

(b) Betrachte den Fall $A = \mathbb{Z}$ und $P = (p)$ für eine Primzahl p. Zeige, dass $p\mathbb{Z}[X]$ kein maximales Ideal ist.

(c) Zeige, dass in $\mathbb{Z}[X]$ jedes maximale Ideal von zwei Elementen erzeugt wird und nicht von einem Element erzeugt werden kann.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Sei A ein kommutativer Ring. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) Wenn $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Kette von Idealen in A ist (d.h. $k < i$ impliziert $I_k \subseteq I_i$) so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $I_k = I_n$ für alle $k \geq n$.

(b) Wenn $\mathfrak{I} \neq \emptyset$ eine Menge von Idealen in A ist, so enthält $\mathfrak{I}$ ein inklusionsmaximales Element I, d.h. $\exists I \in \mathfrak{I} \colon \forall J \in \mathfrak{I} \colon (I \subseteq J \Rightarrow I = J)$.

(c) Jedes Ideal $I \subseteq A$ ist endlich erzeugt, d.h. es existieren $a_1, \ldots, a_r \in A$ mit

$$I = (a_1, \ldots, a_r) = \{\textstyle\sum_{k=1}^r b_i a_i \mid b_1, \ldots, b_r \in A\}.$$

Die Abgabe erfolgt bis **Mittwoch**, den **18.12.2013** in der Übung. Gutes Gelingen!

Wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist, so nennt man A *noethersch*.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Zeige, dass jeder Integritätsbereich mit endlich vielen Elementen ein Körper ist.

Aufgabe 7 (2+6 Punkte). Sei A ein Ring. Ein Element $e \in A$ heißt *idempotent*, wenn $e^2 = e$. Es heißt *zentral*, wenn außerdem $ea = ae$ für alle $a \in A$ gilt. Zwei Idempotente $e, f \in A$ heißen *orthogonal* wenn $ef = fe = 0$. Wir nennen $e_1, \ldots, e_n \in A$ ein vollständiges System von Idempotenten, wenn die e_i paarweise orthogonale und zentrale Idempotente mit $e_1 + \cdots + e_n = 1$ sind.

(a) Sei $e \in A$ idempotent. Zeige, dass $1 - e$ idempotent und zu e orthogonal ist.

(b) Wenn $e_1, \ldots, e_n \in A$ ein vollständiges System von Idempotenten ist, definiere $A_i := Ae_i$ für $i \in [n]$. Zeige, dass A_i ein Ring bezüglich der Verknüpfungen von A ist und dass A isomorph zu $A_1 \times \cdots \times A_n$ ist.