Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin, Fakultät II,
Institut für Mathematik, Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2013, zweite Hälfte

Aufgabenzettel 10

Auf diesem Zettel bezeichnet $\Bbbk$ stets einen Körper.

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei $\Bbbk = \mathbb{Z}_2$ der Körper mit zwei Elementen.

(a) Zerlege $f := 1 + X^2 + X^3 + X^6 + X^7 + X^9 + X^{11} \in \Bbbk[X]$ in quadratfreie Faktoren.

(b) Zeige, dass das Polynom $1 + X + X^4 + X^5 + X^8 \in \Bbbk[X]$ quadratfrei ist und berechne seine irreduziblen Faktoren mit Berlekamps Algorithmus.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Für $f \in \Bbbk[X_1, \dots, X_n]$ und $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Bbbk^n$ bezeichne $f(a)$ das Bild von f unter dem Auswertungshomomorphismus $\Bbbk[X_1, \dots, X_n] \to \Bbbk$, welcher $X_i \mapsto a_i$ abbildet. Zeige:

(a) Wenn $\Bbbk$ unendlich viele Elemente hat und $f(a) = 0$ für alle $a \in \Bbbk^n$, dann ist f das Nullpolynom. Schlussfolgere, dass zwei Polynome genau dann gleich sind, wenn sie die gleichen Funktionen $\Bbbk^n \to \Bbbk$ definieren.

(b) Finde ein Beispiel für einen endlichen Körper $\Bbbk$ und zwei verschiedene Polynome $f, g \in \Bbbk[X_1, \dots, X_n]$ mit $f(a) = g(a)$ für alle $a \in \Bbbk^n$.

Für einen Körper $\Bbbk$ betrachten wir im Polynomring $\Bbbk[X_1, \dots, X_n]$ den *homogenen Anteil* vom Totalgrad d

$$\Bbbk[X_1, \dots, X_n]_d := \left\{ \textstyle\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \in \Bbbk[X_1, \dots, X_n] \;\middle|\; \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = d \right\}.$$

Aufgabe 3 (12 Punkte). Sei $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$. Für $k \in [n]$ definieren wir die k-te partielle Ableitung als die $\Bbbk$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \partial_k \colon \Bbbk[X_1, \dots, X_n] &\longrightarrow \Bbbk[X_1, \dots, X_n] \\ X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} &\longmapsto \alpha_k \cdot X_1^{\alpha_1} \cdots X_k^{\alpha_k - 1} \cdots X_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

Da ∂_k auf der Basis der Monome definiert wurde, ist somit ein Homomorphismus von $\Bbbk$-Vektorräumen definiert.

(a) Zeige für $f, g \in \Bbbk[X_1, \dots, X_n]$ die *Leibnizregel* $\partial_k(fg) = f\partial_k(g) + \partial_k(f)g$.

(b) Sei $d > 0$. Zeige, dass $f \in \Bbbk[X_1, \dots, X_n]$ genau dann homogen vom Grad d ist, wenn die *Eulersche Formel* $\sum_{k=1}^n X_k \partial_k(f) = d \cdot f$ erfüllt ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte). Sei $f \in \mathbb{k}[X_1, \ldots, X_n]_d$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Zeige: Wenn $f = f_1 \cdots f_r$ sich als Produkt von Polynomen $f_i \in \mathbb{k}[X_1, \ldots, X_n]$ schreiben lässt, so sind die f_i ebenfalls homogen.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Zeige, dass $\mathbb{C}[X, Y]/(Y - X^2)$ und $\mathbb{C}[X]$ als Ringe isomorph sind, aber dass es keinen Isomorphismus von Ringen zwischen $\mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^3)$ und $\mathbb{C}[X]$ gibt.