Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin, Fakultät II,
Institut für Mathematik, Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2013, zweite Hälfte

Aufgabenzettel 11

Aufgabe 1 (8 Punkte). Zeige mit Hilfe des Eisensteinschen Irreduzibilitätskriteriums, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind:

(a) $X^7 - 6X^5 + 9X^2 + 12X - 15 \in \mathbb{Z}[X]$

(b) $Y^3 + XY^2 + X^2Y + X^2 + X \in \mathbb{Q}[X,Y]$

Aufgabe 2 (10 Punkte). Es seien X_{ij} für $i,j \in [n]$ Unbestimmte über einem Körper $\Bbbk$ und $R := \Bbbk[X_{ij} \mid i,j \in [n]]$. Wir bezeichnen mit $\det_n \in R$ die Determinante der Matrix $(X_{ij})_{i,j\in[n]} \in R^{n\times n}$. Zeige, dass $\det_n$ irreduzibel ist.
Gehe dazu wie folgt vor: Führe Induktion nach n. Fasse im Induktionsschritt $\det_n$ als Polynom in X_{nn} auf. Bestimme den Grad von $\det_n$ in X_{nn} und zeige mittels Induktionsvoraussetzung, dass dieses Polynom primitiv ist.

Aufgabe 3 (2+6 Punkte). Betrachte das Polynom $f := X^p - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ für p prim.

(a) Zeige, dass $X - 1$ ein Teiler von f ist und berechne das Polynom $g \in \mathbb{Q}[X]$, welches $f = (X-1)g$ erfüllt.

(b) Sei $t : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ der Automorphismus gegeben durch $t(X) := X + 1$. Wende das Eisenstein-Kriterium auf $t(g)$ an und schlussfolgere, dass g irreduzibel ist.

In den folgenden Aufgaben wird die Konstruktion des Quotientenkörpers verallgemeinert. Sei A ein (kommutativer) Integritätsbereich. Eine *multiplikative Teilmenge* von A ist eine Menge $S \subseteq A$ mit $1 \in S$ und $ab \in S$ für $a, b \in S$.

Aufgabe 4 (2+2+4 Punkte).

(a) Betrachte auf $A \times S$ die Äquivalenzrelation $(a,b) \sim (a',b') :\Leftrightarrow ab' = a'b$. Zeige, dass die Äquivalenzklassen eine wohldefinierte Ringstruktur aufweisen. Wir nennen diesen Ring $S^{-1}A := (A \times S)/{\sim}$ die *Lokalisierung von A nach S*.

(b) Sei K der Quotientenkörper von A. Zeige, dass

$$S^{-1}A = \{\, a/s \in K \mid a \in A,\, s \in S \,\} \subseteq K$$

ein Unterring von K ist, welcher A enthält. Gebe ein S an, so dass $K = S^{-1}A$.

(c) Sei $a \in A$. Betrachte das multiplikative System $S_a := \left\{ a^k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$. Zeige, dass $S_a^{-1}A \cong A[X]/(aX - 1)$.

Aufgabe 5 (3+3 Punkte). Sei A ein faktorieller Integritätsbereich. Zeige:

(a) Wenn $x \in S^{-1}A$ prim ist, so ist x assoziiert zu einem $\tilde{x} \in A$. Unter welcher Bedingung ist ein Primelement von A auch prim in $S^{-1}A$?

(b) Die Lokalisierung $S^{-1}A$ ist faktoriell.

Aufgabe 6 (5+5 Punkte). Ein kommutativer Ring B heißt *lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal hat.

(a) Zeige, dass B genau dann lokal ist, wenn $B \setminus B^{\times}$ ein Ideal ist. Schlussfolgere, dass dieses Ideal das eindeutige maximale Ideal von B ist.

(b) Sei A ein Integritätsbereich und $P \subseteq A$ ein Primideal. Zeige, dass $S_P := A \setminus P$ eine multiplikative Teilmenge ist und $B := S_P^{-1}A$ ein lokaler Ring.

Die Abgabe erfolgt bis **Mittwoch**, den **22.01.2014** in der Übung. Gutes Gelingen!