Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin, Fakultät II,
Institut für Mathematik, Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2013, zweite Hälfte

Aufgabenzettel 12

Aufgabe 1 (8 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring. Drücke das symmetrische Polynom $\Delta_3 := (X_1 - X_2)^2(X_1 - X_3)^2(X_2 - X_3)^2 \in R[X_1, X_2, X_3]$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen σ_1, σ_2 und σ_3 aus.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Eine vollständig geordnete Menge $(X, <)$ heißt **wohlgeordnet**, wenn jede nichtleere Teilmenge $M \subseteq X$ ein minimales Element enthält. Betrachte auf $\mathbb{N}^n$ die *lexikographische Ordnung*

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) < (\beta_1, \ldots, \beta_n) :\Leftrightarrow \exists j\colon (\forall i < j\colon \alpha_i = \beta_i) \wedge (\alpha_j < \beta_j).$$

Zeige dann, dass $(\mathbb{N}^n, \leq)$ wohlgeordnet ist

Aufgabe 3 (14 Punkte). Sei R ein (kommutativer) Integritätsbereich, $\operatorname{char}(R) \neq 2$. Betrachte die bekannte Wirkung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ auf dem Polynomring $A := R[X_1, \ldots, X_n]$. Ein Polynom $f \in A$ heißt **antisymmetrisch** wenn $\forall \pi \in \mathfrak{S}_n\colon \pi.f = (-1)^\pi \cdot f$, wobei $(-1)^\pi$ das *Signum* der Permutation π bezeichnet. Zeige:

(a) Die *Vandermonde-Determinante*

$$\delta := \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (X_i - X_j) \qquad (\dagger)$$

ist antisymmetrisch.

(b) Jedes antisymmetrische Polynom f ist von der Form $f = g\delta$ mit einem symmetrischen Polynom g.

(c) Ein antisymmetrisches Polynom ungleich dem Nullpolynom hat mindestens Grad $\frac{n^2-n}{2}$.

Aufgabe 4 (12 Punkte). Sei $\Bbbk$ ein Körper, $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ und $A := \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$. Die bekannte Wirkung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ auf A induziert eine Wirkung der *alternierenden Gruppe* $\mathfrak{A}_n = \{\pi \in \mathfrak{S}_n \mid (-1)^\pi = 1\} \subseteq \mathfrak{S}_n$. Betrachte nun den Unterring $A^{\mathfrak{A}_n} = \{f \in A \mid \forall \pi \in \mathfrak{A}_n\colon \pi.f = f\}$ aller Polynome, welche invariant unter $\mathfrak{A}_n$ sind. Zeige:

$$\forall f \in A^{\mathfrak{A}_n}\colon \exists g, h \in A^{\mathfrak{S}_n}\colon f = h + g\delta,$$

wobei δ wie in $(\dagger)$ definiert ist.

Die Abgabe erfolgt bis **Mittwoch**, den **29.01.2014** in der Übung. Gutes Gelingen!

Aufgabe 5 (8 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring. Für $\alpha \in R$ bezeichnen wir mit $t_\alpha \colon R[X] \to R[X]$ den eindeutigen Ringhomomorphismus, der auf R die Identität ist und $t_\alpha(X) = X + \alpha$ erfüllt. Zeige: Für jedes normierte Polynom $f \in R[X]$ und jedes $\alpha \in R$ gilt $\operatorname{disc}(f) = \operatorname{disc}(t_\alpha(f))$.