Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin, Fakultät II,
Institut für Mathematik, Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2013, zweite Hälfte

Aufgabenzettel 13

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring und $f, g, h \in R[X] \setminus R$ normierte Polynome. Zeige:

(a) $\operatorname{res}(fg, h) = \operatorname{res}(f, h) \cdot \operatorname{res}(g, h)$,

(b) $\operatorname{disc}(fg) = \operatorname{disc}(f) \cdot \operatorname{disc}(g) \cdot \operatorname{res}(f, g)^2$.

Aufgabe 2 (12 Punkte).

(a) Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Körpererweiterung, so dass der Erweiterungsgrad $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ eine Primzahl ist. Man zeige: Es existiert ein $a \in \mathbb{L}$ mit $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$.

(b) Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 2^k$ und $f \in \mathbb{K}[X]$ ein kubisches Polynom, welches in $\mathbb{L}$ eine Nullstelle hat. Man zeige: f hat bereits eine Nullstelle in $\mathbb{K}$.

(c) Bestimme $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]$ und zeige, dass jedes reelle Polynom von ungeradem Grad eine reelle Nullstelle hat.

Aufgabe 3 (8 Punkte). Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein normiertes kubisches Polynom. Zeige, dass f genau dann drei verschiedene, reelle Nullstellen hat, wenn $\operatorname{disc}(f) > 0$.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Körpererweiterung. Man zeige:

(a) Für $a \in \mathbb{L}$ ist das Minimalpolynom von a über $\mathbb{K}$ gleich dem Minimalpolynom der $\mathbb{K}$-linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_a \colon \mathbb{L} &\longrightarrow \mathbb{L} \\ x &\longmapsto a \cdot x. \end{aligned}$$

Hinweis: Es wird der Satz von Cayley-Hamilton aus der linearen Algebra als bekannt vorausgesetzt.

(b) Wenn $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$, so ist das Minimalpolynom von a über $\mathbb{K}$ bereits gleich dem *charakteristischen* Polynom von ϕ_a.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Betrachte den Körper $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(a) Bestimme den Grad der Erweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ und bestimme eine Basis von $\mathbb{K}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(b) Verwende Aufgabe 4, um das Minimalpolynom von $a := \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{K}$ über $\mathbb{Q}$ zu bestimmen.

Die Abgabe erfolgt bis **Mittwoch**, den **05.02.2014** in der Übung. Gutes Gelingen!