Prof. Dr. Peter Bürgisser
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenzettel 1

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$, wobei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit ist. Ein *primitives Element* von $\mathbb{K}$ über $\mathbb{Q}$ ist ein $\alpha \in \mathbb{K}$, so dass $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$. Finde ein primitives Element von $\mathbb{K}$ über $\mathbb{Q}$ (und beweise deine Behauptung).

Aufgabe 2 (12 Punkte). Sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper. Zeige:

(1) Es gilt $\prod_{x \in \mathbb{K}^\times} x = -1$.
Hinweis: Wann ist $x = x^{-1}$?

(2) Jede Primzahl p ist ein Teiler von $(p-1)! + 1$.

Aufgabe 3 (16 Punkte). Sei p eine Primzahl. Wir bezeichnen mit $\mathbb{F}_p$ den Körper mit p Elementen und mit $\mathbb{F}_p(X)$ den Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{F}_p[X]$.

(1) Berechne $\left[\mathbb{F}_p(X) : \mathbb{F}_p(X^p)\right]$ und $\left[\mathbb{F}_p(X) : \mathbb{F}_p(X^p)\right]_s$.

(2) Für $\mathbb{K} := \mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$ und $\mathbb{L} := \mathbb{F}_p(X, Y)$ berechne $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ und $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]_s$.

(3) Zeige, dass $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ keine einfache Körpererweiterung ist.

Aufgabe 4 (12 Punkte). Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung in Charakteristik $p > 0$ und $\alpha \in \mathbb{L}$. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(1) α ist separabel über $\mathbb{K}$

(2) $\mathbb{K}(\alpha) = \mathbb{K}(\alpha^p)$

Hinweis: Für (1) $\Rightarrow$ (2) betrachte das Minimalpolynom von α über $\mathbb{K}(\alpha^p)$ und verwende für (2) $\Rightarrow$ (1) den Satz aus §6.7.

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **29.04.2014** vor der Vorlesung. Gutes Gelingen!