

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG ALGEBRA 2

Sommersemester 2014

Aufgabenzettel 2

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei \mathbb{K} ein Körper. Zeige:

- (1) Wenn \mathbb{K} perfekt ist und $f \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}$ ein Polynom, so ist f genau dann quadratfrei wenn $\text{ggT}(f, f') = 1$. Vergleiche auch §4.6 aus Algebra 1.
- (2) Wenn \mathbb{K} nicht perfekt ist, so gibt es ein Polynom $f \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}$ mit $\text{ggT}(f, f') \neq 1$, welches dennoch über \mathbb{K} quadratfrei ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Zeige, dass jede Körpererweiterung vom Grad 2 normal ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe G . Betrachte die Wirkung von $G = \text{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$ auf \mathbb{L} und zeige: Für $\alpha \in \mathbb{L}$ gilt $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$ genau dann, wenn der Stabilisator von α in G trivial ist.

Aufgabe 4 (16 Punkte). Betrachte $f = X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

- (1) Beschreibe den Zerfällungskörper \mathbb{K} von f , indem du Elemente angibst, die durch Adjunktion zu \mathbb{Q} den Körper \mathbb{K} ergeben.
- (2) Bestimme den Körpergrad $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$.
- (3) Bestimme die Galoisgruppe $G := \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{K})$ von \mathbb{K} über \mathbb{Q} .
- (4) Bestimme ein primitives Element $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$.

Hinweis zu (4): Verwende Aufgabe 3 und Teil (3).

Aufgabe 5 (10). Sei \mathbb{K} ein endlicher Körper mit q Elementen und $f \in \mathbb{K}[X]$ ein irreduzibles, normiertes Polynom vom Grad d .

- (1) Zeige, dass es einen endlichen Körper \mathbb{L} mit q^d Elementen gibt, welcher \mathbb{K} enthält und ein $\alpha \in \mathbb{L}$ mit $f(\alpha) = 0$.
- (2) Zeige, dass in \mathbb{L} die Faktorisierung $f = \prod_{i=0}^{d-1} (X - \alpha^{q^i})$ gilt.

Hinweis: Betrachte die Wirkung des Frobenius-Automorphismus.

- (3) Zeige, dass die Erweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ Galoisch ist und bestimme die Galoisgruppe.