Prof. Dr. Peter Bürgisser
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

# Übungen zur Vorlesung Algebra 2

Sommersemester 2014

## Aufgabenzettel 3

**Aufgabe 1 (5 Punkte).** Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Galois-Erweiterung mit Galoisgruppe $G$. Sei $H \leq G$ eine Untergruppe und $\mathbb{E} := \mathbb{L}^H$ der Fixkörper unter $H$. Zeige: Für alle $\sigma \in G$ ist $\sigma(\mathbb{E})$ der Fixkörper der Untergruppe $\sigma H \sigma^{-1}$. Man sagt, dass $\sigma(\mathbb{E})$ zu $\mathbb{E}$ *konjugiert* ist.

**Aufgabe 2 (10 Punkte).** Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Galois-Erweiterung mit Galoisgruppe $G$. Die Erweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ heißt *abelsch*, falls $G$ abelsch ist. Zeige: Falls $\mathbb{L}$ Zerfällungskörper eines irreduziblen, separablen Polynoms $f \in \mathbb{K}[X]$ ist und $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ abelsch, so gilt $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$ für jede Nullstelle $\alpha \in \mathbb{L}$ von $f$.

**Aufgabe 3 (20 Punkte).** Sei $f := X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und $\mathbb{L}$ der Zerfällungskörper von $\mathbb{L}$ über $\mathbb{Q}$. Bestimme alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{L}$ samt ihrer Galoisgruppe und stellen Sie sie wie in $(\star)$ dar (siehe Seite 2).

*Hinweis:* Es dürfen alle Ergebnisse der Aufgabe 4 auf Zettel 2 verwendet werden.

**Aufgabe 4 (15 Punkte).** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = p > 0$ und $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine algebraische Körpererweiterung. Ein Element $a \in \mathbb{L}$ heißt *rein inseparabel* über $\mathbb{K}$, falls es $n \in \mathbb{N}$ und $\zeta \in \mathbb{K}$ gibt, so dass $a$ Nullstelle des Polynoms $X^{p^n} - \zeta \in \mathbb{K}[X]$ ist. Eine Erweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ heißt *rein inseparabel*, falls jedes $a \in \mathbb{L}$ rein inseparabel über $\mathbb{K}$ ist. Zeige: Es gibt genau einen Zwischenkörper $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_s \subseteq \mathbb{L}$, sodass $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_s$ separabel und $\mathbb{K}_s \subseteq \mathbb{L}$ rein inseparabel ist. Es gilt dabei

$$\mathbb{K}_s = \{a \in \mathbb{L} \mid a \text{ separabel über } \mathbb{K}\}.$$

*Hinweis*: Verwenden Sie den Satz aus §6.7.

**Illustrierendes Beispiel zu Aufgabe 3:**

Sei $\mathbb{L} := \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Die Erweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}$ ist eine Galois-Erweiterung mit Galoisgruppe

$$\operatorname{Gal}(\mathbb{L} \mid \mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}, \sigma, \tau, \sigma\tau\},$$

wobei $\sigma(i) = -i$, $\sigma(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ und $\tau(i) = i$, $\tau(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Wir haben folgende Untergruppen:

(1) $H_1 = \{\mathrm{id}, \tau\}$.

(2) $H_2 = \{\mathrm{id}, \sigma\tau\}$.

(3) $H_3 = \{\mathrm{id}, \sigma\}$.

Die Zwischenkörper können in einem Körperdiagramm dargestellt werden:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \mathbb{L} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathbb{L}^{H_1} = \mathbb{Q}(i) \arrow[dr] & \mathbb{L}^{H_2} = \mathbb{Q}(i\sqrt{2}) \arrow[d] & \mathbb{L}^{H_3} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dl] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd} \tag{$\star$}$$

Stellen Sie die Zwischenkörper in Aufgabe 3 in einem solchen Körperdiagramm dar.