Prof. Dr. Peter Bürgisser
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenzettel 4

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe. Ein *Charakter* χ von G ist ein Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$. Die Menge aller Charaktere wird mit $\mathbb{X}(G)$ bezeichnet. Seien nun $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{X}(G)$. Mittels Festlegung von $(\chi_1\chi_2)(g) := \chi_1(g)\chi_2(g)$ wird eine Gruppenstruktur auf $\mathbb{X}(G)$ induziert. Sei nun S_n die symmetrische Gruppe über n Elementen. Zeige, dass $\mathbb{X}(S_n) = \{\mathrm{id}, \mathrm{sgn}\}$.
Hinweis: Verwende, dass A_n einfach ist für $n \geq 5$.

Bemerkung: Wie in der Vorlesung bezeichnet $\zeta_n \in \mathbb{C}$, $n > 1$, auf diesem Übungszettel eine *n-te primitive Einheitswurzel*. D.h. $\zeta_n^n = 1$ und $\zeta_n^k \neq 1$ für alle $1 \leq k < n$.

Aufgabe 2 (20 Punkte).

(1) Bestimme $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\zeta_8)/\mathbb{Q}\right)$ sowie alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_8)$.

(2) Für $n > 2$ zeige, dass $[\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1}) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)/2$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Beweise folgende Aussagen:

(1) $\mathrm{ggT}(n, m) = 1 \Longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_n) \cap \mathbb{Q}(\zeta_m) = \mathbb{Q}$.

(2) $\mathrm{ggT}(n, m) = 1 \Longrightarrow \Phi_n(X)$ ist in $\mathbb{Q}(\zeta_m)[X]$ irreduzibel .

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei p eine Primzahl und $r \geq 1$. Zeige, dass $\Phi_{p^r}(X) = \Phi_p(X^{p^{r-1}})$.
Hinweis: Vergleiche die Grade der Polynome.

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **20.05.2014** vor der Vorlesung. Gutes Gelingen!