Prof. Dr. Peter Bürgisser
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenzettel 5

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $a_0, \ldots, a_n$ Unbestimmte über $\mathbb{K}$. Wir definieren das *allgemeine Polynom* vom Grad n über $\mathbb{E} := \mathbb{K}(a_0, \ldots, a_n)$ als

$$A := \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{K}(a_0, \ldots, a_n)[X].$$

Zeige, dass A irreduzibel über $\mathbb{E}$ ist.

Hinweis: Einen kurzen, eleganten Beweis liefert das Anwenden von Galois-Theorie.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \nmid \operatorname{char} \mathbb{K}$. Wir definieren das n-te Kreisteilungspolynom *über* $\mathbb{K}$ als

$$\widetilde{\Phi}_n(X) := \prod_{\zeta} (X - \zeta) \in \overline{\mathbb{K}}[X],$$

wobei das Produkt über alle primitiven n-ten Einheitswurzeln $\zeta \in \overline{\mathbb{K}}$ läuft. Zeige, dass der kanonische Homomorphismus $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{K}[X]$ das Kreisteilungspolynom $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ auf $\widetilde{\Phi}_n(X)$ abbildet.

Hinweis: Zeige wie in der Vorlesung, dass $X^n - 1 = \prod_{d|n} \widetilde{\Phi}_d(X)$. Verwende dazu Induktion nach n.

Aufgabe 3 (15 Punkte). Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $\zeta \in \overline{\mathbb{K}}$ eine n-te primitive Einheitswurzel und $\widetilde{\Phi}_n$ das n-te Kreisteilungspolynom über $\mathbb{K}$. Sei $d := [\mathbb{K}(\zeta) : \mathbb{K}]$. Zeige, dass $\widetilde{\Phi}_n$ über $\mathbb{K}$ in $\frac{\varphi(n)}{d}$ verschiedene irreduzible Faktoren vom Grad d zerfällt.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Die Charaktergruppe $\mathbb{X}(G)$ einer Gruppe G besteht aus allen Gruppenhomomorphismen $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$.

(1) Sei G eine endliche zyklische Gruppe. Zeige, dass $G \cong \mathbb{X}(G)$.

(2) Sei G ein direktes Produkt von endlichen zyklischen Gruppen (nicht notwendigerweise alle von gleicher Ordnung). Zeige, dass $G \cong \mathbb{X}(G)$.

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **27.05.2014** vor der Vorlesung. Gutes Gelingen!

Prof. Dr. Peter Bürgisser
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Bemerkung: Der Struktursatz endlicher abelscher Gruppe besagt, dass jede endliche abelsche Gruppe isomorph zu einem direkten Produkt endlicher zyklischer Gruppen ist. Mit Aufgabenteil (2) haben wir also gezeigt, dass endliche abelsche Gruppen stets isomorph zu ihrer Charaktergruppe sind.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Sei p eine Primzahl und $\mathbb{K}$ ein Körper, der eine p-te primitive Einheitswurzel enthält. Zeige: Ist $X^p - c \in \mathbb{K}[X]$ reduzibel, so zerfällt es über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren.

Hinweis: Zeige und verwende folgende Aussage: Ist $G \leq \mathfrak{S}_p$ eine zyklische Untergruppe von Primzahlordnung p, so enthält G einen Zykel der Länge p.