Prof. Dr. Peter Bürgisser
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenzettel 7

Aufgabe 1 (10 Punkte). Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $f(X) := X^4 + pX^2 + qX + r$ mit $p, q, r \in \mathbb{K}$. Sei $\mathbb{L}$ der Zerfällungskörper von f. Wir fassen $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ als Untergruppe von $\mathfrak{S}_4$ auf. Sei zudem $\mathfrak{V}_4 \leq \mathfrak{S}_4$ die Klein'sche Vierergruppe.

(1) Zeige, dass $G \cap \mathfrak{V}_4$ ein Normalteiler in G ist.

(2) Zeige, dass $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{E}) = G \cap \mathfrak{V}_4$, wobei $\mathbb{E}$ mit $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{L}$ den Zerfällungskörper der *kubischen Resolvente* von f bezeichnen soll.

(3) Gib eine Normalreihe von G an, die $G \cap \mathfrak{V}_4$ enthält.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Berechne den Zerfällungskörper von $X^4 + 2X + 1$ über $\mathbb{Q}$. Die Verwendung eines CAS ist hierbei erlaubt.

Aufgabe 3 (15 Punkte). Zeige: Die Galoisgruppe von $X^4 + 4X^3 + 10X^2 + 7X + 4 \in \mathbb{Z}[X]$ ist die $\mathfrak{S}_4$. Verwende dazu folgenden Satz:
Satz: Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ normiert vom Grad $n \geq 1$. Sei p prim mit der Eigenschaft, dass $\bar{f} := f \bmod p$ quadratfrei ist. Sei $\bar{f} = g_1 \cdots g_r$ mit $g_i \in \mathbb{F}_p[X]$ die Zerlegung von $\bar{f}$ in irreduzible Faktoren. Dann enthält die Galois-Gruppe von f eine Permutation vom Zykeltyp $(n_1, \ldots, n_r)$, wobei $n_i = \deg(g_i)$.

Aufgabe 4 (15 Punkte). Es sei $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ eine algebraische Erweiterung. Wir setzen

$$\mathcal{O}_{\mathbb{K}} := \{z \in \mathbb{K} \mid \exists f \in \mathbb{Z}[X] \backslash \{0\}, f \text{ normiert } : f(z) = 0\}$$

(Später in der Vorlesung beweisen wir, dass $\mathcal{O}_K$ ein Ring ist, der sogannte *ganze Ringabschluss* von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{K}$.) Sei nun $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei und $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Beweise, dass

$$\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \begin{cases} \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right] & \text{, falls } d \equiv 1 \bmod 4 \\ \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & \text{, falls } d \equiv 2, 3 \bmod 4 \end{cases}$$

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **10.06.2014** vor der Vorlesung. Gutes Gelingen!