Prof. Dr. Peter Bürgisser
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenzettel 10

Aufgabe 1 (8 Punkte). Sei $A = \mathbb{Q}[X, Y]$ der Polynomring in zwei Variablen. Dann ist A ein freier A-Modul über sich selbst mit Basis $\{1\}$. Betrachte den A-Untermodul $I \subseteq A$, welcher von X und Y erzeugt wird. Zeige, dass I kein freier Modul ist.

Aufgabe 2 (25 Punkte). Sei G eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung n mit neutralem Element $e \in G$ und $\mathbb{K}$ ein Körper. Definiere den *Gruppenring* $\mathbb{K}[G]$ als

$$\mathbb{K}[G] := \mathbb{K}\left[X_g \,\middle|\, g \in G\right] / I_G\ ,$$

wobei I_G das Ideal ist, welches von den Polynomen $X_g X_h - X_{gh} X_e$ für alle $g, h \in G$ und dem Polynom $X_e - 1$ erzeugt wird.

(1) Sei $\mathbb{K}^G$ der Vektorraum mit Basis G. Zeige, dass $\mathbb{K}^G \cong \mathbb{K}[G]$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum und beschreibe die dadurch gegebene Multiplikation in $\mathbb{K}^G$.

Wir schreiben ab jetzt $g \in \mathbb{K}[G]$ für die Restklasse von X_g.

(2) Zeige, dass für $n > 1$ das Ideal I_G nicht prim ist.
Hinweis: Betrachte das Element $g^k - 1 \in \mathbb{K}[G]$ für $g \in G$ von Ordnung $1 < k \leq n$.

(3) Sei C_n eine zyklische Gruppe von Ordnung n. Beschreibe $\mathbb{K}[C_n]$ als Quotienten $\mathbb{K}[X]/I$ eines Polynomrings in einer Variablen. In diesem Fall ist I ein Hauptideal. Wovon wird es erzeugt?

(4) Sei V ein $\mathbb{K}[G]$-Modul. Für $g \in G$ sei $\phi_g \colon V \to V$ die Abbildung, welche durch $\phi_g(v) := gv$ gegeben ist. Zeige, dass V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, ϕ_g eine invertierbare, $\mathbb{K}$-lineare Abbildung und

$$\begin{aligned} D\colon G &\longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V) \\ g &\longmapsto \phi_g \end{aligned} \tag{†}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

(5) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $D\colon G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass es auf V eine eindeutige $\mathbb{K}[G]$-Modulstruktur gibt mit der Eigenschaft, dass der wie in (†) gegebene Homomorphismus mit D übereinstimmt.

Aufgabe 3 (7 Punkte). Beweise oder widerlege die folgende Aussage: Sei A ein Ring, M ein freier A-Modul und $N \subseteq M$ ein freier Untermodul von M. Dann existiert ein Untermodul $P \subseteq M$ mit $M = N \oplus P$.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring und $T = (t_{ij}) \in R^{n\times n}$ eine Matrix. Wir definieren die *Determinante* von T durch die Leibniz-Formel

$$\det(T) := \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} (-1)^\pi \cdot \prod_{i=1}^n t_{i\pi(i)}.$$

Bezeichne mit T_{ij} die Matrix, die aus T entsteht, indem man die i-te Zeile und die j-te Spalte entfernt. Definiere $\tilde{t}_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det(T_{ji}) \in R$. Die Matrix $\tilde{T} := (\tilde{t}_{ij}) \in R^{n\times n}$ heißt *Adjunkte* von T. Beweise, dass

$$T \cdot \tilde{T} = \tilde{T} \cdot T = \det(T) \cdot \mathbb{1}_n,$$

wobei $\mathbb{1}_n \in R^{n\times n}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

Hinweis. Für den Fall, in dem R ein Körper ist, darf die Aussage als bekannt vorausgesetzt werden. Führe die Situation auf einen Fall zurück, in dem R ein Integritätsbereich ist.