Prof. Dr. Peter Bürgisser
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenzettel 11

Aufgabe 1 (20 Punkte). Sei R ein euklidischer Ring und $\delta := \delta_R \colon R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ die zugehörige Bewertungsfunktion (etwa $R = \mathbb{Z}$ und $\delta(x) = |x|$). Sei $A \in R^{n\times m}$ eine Matrix.

(1) Zeige, dass $U \in \mathrm{GL}_n(R)$ und $V \in \mathrm{GL}_m(R)$ mit

$$U \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{†}$$

existieren, wobei $E = \mathrm{diag}(e_1, \ldots, e_r) \in R^{r\times r}$ eine Diagonalmatrix mit $e_i \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq r$ ist, so dass $e_i \mid e_{i+1}$ für $i < r$.

Man nennt (†) die *Smith-Normalform* von A.

Hinweis: Es kann mittels elementarer Zeilen- und Spaltenumformungen erreicht werden, dass a_{11} jedes Element der ersten Zeile und jedes Element der ersten Spalte teilt. Verwende dazu Division mit Rest.

(2) Bringe die folgende Matrix in die Form (†):

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$$

Aufgabe 2 (20 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und $I \subseteq R$ ein Ideal.

(1) Sei $\phi \colon M \to M$ eine R-lineare Abbildung mit $\phi(M) \subseteq I \cdot M$. Zeige, dass es gewisse $a_1, \ldots, a_n \in I$ gibt, so dass

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Hinweis: Betrachte den Ring $A := R[\phi] \subseteq \mathrm{End}(M)$ und zeige zunächst, dass A kommutativ ist. Wähle ein Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_n \in M$ und schreibe $\phi(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ mit $a_{ij} \in I$. Zeige, dass die Determinante der Matrix $\phi\mathbb{1}_n - (a_{ij}) \in A^{n\times n}$ im Annihilator von M (als A-Modul) enthalten ist. Siehe auch Aufgabe 4 von Zettel 10.

Prof. Dr. Peter Bürgisser
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

(2) Beweise das *Nakayama-Lemma*: Angenommen, es gilt $M = I \cdot M$. Schlussfolgere, dass es ein $x \in R$ gibt mit $xM = 0$ und $x \equiv 1 \pmod{I}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, d.h. $\mathfrak{m} \subseteq R$ ist das einzige maximale Ideal von R. Sei $\Bbbk := R/\mathfrak{m}$ und M ein R-Modul. Zeige:

(1) Wenn $N \subseteq M$ ein Untermodul von M mit $M = N + \mathfrak{m}M$ ist, so gilt $M = N$. Wende dazu Aufgabe 2.(2) auf den Modul M/N an.

(2) Wenn die Restklassen der Elemente $x_1, \ldots, x_n \in M$ eine Basis des $\Bbbk$-Vektorraums $M/\mathfrak{m}M$ bilden, so bildet $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein Erzeugendensystem von M.