Prof. Dr. Peter Bürgisser
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenzettel 12

Aufgabe 1. Wieviele abelsche Gruppen der Ordnung 1001 gibt es bis auf Isomorphie? Wieviele der Ordnung 600?

Aufgabe 2. Beweise folgenden Satz: Jeder endlich erzeugte Torsionsmodul M über einem Hauptidealbereich A ist isomorph zu einer direkten Summe von zyklischen Moduln

$$A/Ad_1 \oplus \ldots \oplus A/Ad_r,$$

wobei $d_1, \ldots, d_r \in A \backslash (A^\times \cup \{0\})$ und $d_j \mid d_{j+1}$ für $1 \leq j < r$. Die Folge der Ideale $(d_1), \ldots, (d_r)$ ist durch M eindeutig bestimmt. Es gilt $\operatorname{ann}(M) = (d_r)$.

Hinweis: Verwende den in der Vorlesung bewiesenen Struktursatz.

Bemerkung: Man nennt $d_1, \ldots, d_r$ die *invarianten Faktoren* von M.

Aufgabe 3. In der Vorlesung wird folgendes gezeigt werden: Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist ähnlich zu einer Blockdiagonalmatrix

$$C = \begin{pmatrix} C_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C_{q_t} \end{pmatrix},$$

wobei die Blöcke C_{q_i} Begleitmatrizen normierter Polynome $q_i \in \mathbb{K}[X]$ mit $q_i \mid q_{i+1}$ und $\prod_{i=1}^t q_i(X) = \det(C - X \cdot I_{n \times n})$. sind. Man nennt diese (eindeutige) Normalform die *Frobenius-Normalform* über $\mathbb{K}$.

Bringe die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 2 \\ -10 & -7 & -6 & -3 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \\ 12 & 10 & 8 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

in ihre Frobenius-Normalform über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4. Seien A, B Ringe und A ein Unterring von B. Der Ring B heißt *ganze Ringerweiterung von A*, falls für alle $b \in B$ ein normiertes $f \in A[X]$ existiert, so dass $f(b) = 0$. Sei nun $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung von Integritätsringen. Zeige: Der Ring A ist genau dann ein Körper, wenn B es ist.

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **08.07.2014** vor der Vorlesung. Gutes Gelingen!