Prof. Dr. Martin Henk
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 4-1

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenzettel 2

Aufgabe 1 (10 Punkte). Es seien G und H Gruppen, $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, sowie $e_G \in G$ das neutrale Element in G. Zeige:

(1) Für alle $g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$.

(2) $\phi(G)$ ist eine Untergruppe von H.

(3) $\ker \phi$ ist eine Untergruppe von G.

(4) ϕ ist genau dann injektiv, wenn $\ker \phi = \{e_G\}$.

Sei nun $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $\phi(x) := (-1)^x$. Was ist $\phi(\mathbb{Z})$? Was ist $\ker \phi$?

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe mit $|G| = p^k, k \in \mathbb{N}$. Die Gruppe G operiere auf einer endlichen Menge X. Es sei $\mathrm{FP}(G, X) := \{x \in X \mid G.x = \{x\}\}$ die Menge der Fixpunkte von G in X. Zeige, dass p die Zahl $|X| - |\mathrm{FP}(G, X)|$ teilt.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Eine Gruppe G operiere auf einer Menge X. Nimm an, dass $|G| = 55$ und $|X| = 39$. Zeige, dass G einen Fixpunkt $x \in X$ hat.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Zeige den folgenden Satz von Burnside: Seien G eine endliche Gruppe und X eine endliche Menge, auf der G wirkt. Für Elemente $g \in G$ bezeichnen wir mit $X^g := \{x \in X \mid g.x = x\}$ die Menge aller Fixpunkte von g. Dann ist die Anzahl der Bahnen von G gleich

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Hinweis: Betrachte die Menge $R = \{(g, x) \in G \times X \mid g.x = x\}$ und zähle diese auf zwei Arten ab.

Die Abgabe erfolgt bis **Donnerstag**, den **6.11.2014**, vor der Vorlesung. Gutes Gelingen!