Prof. Dr. Martin Henk
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 4-1

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenzettel 3

Aufgabe 1 (10 Punkte). Es seien G, H Gruppen und $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Weiterhin seien $M \subset G$, $N \subset H$ Untergruppen. Zeige:

(1) $\ker \phi \trianglelefteq G$.

(2) $\phi^{-1}(N)$ ist eine Untergruppe von G.

(3) Falls $M \trianglelefteq G$ und ϕ surjektiv, so gilt $\phi(M) \trianglelefteq H$.

(4) Falls $N \trianglelefteq H$, so gilt $\phi^{-1}(N) \trianglelefteq G$.

(5) Falls $(G : M) = 2$, so gilt $M \trianglelefteq G$ und $G/M \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Es sei G eine endliche Gruppe. Zeige: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass ein injektiver Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to S_n$ existiert.
Hinweis: Finde eine passende Menge, auf der G via Permutationen wirkt.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Mit i_g bezeichnen wir den Isomorphismus, welcher durch $i_g(h) := ghg^{-1}$ definiert ist. Es seien weiterhin

- $Z(G) := \{g \in G \mid \forall h \in G : gh = hg\}$, das *Zentrum* von G,
- $\mathrm{Aut}(G) := \{\phi : G \to G \mid \phi \text{ ist Isomorphismus}\}$, die *Menge der Autormorphismen* von G und
- $\mathrm{Inn}(G) := \{i_g \mid g \in G\} \subset \mathrm{Aut}(G)$, die *Menge der inneren Autormorphismen* von G.

Beachte, dass $\mathrm{Aut}(G)$ und $\mathrm{Inn}(G)$ durch Hintereinanderausführung zu Gruppen werden. Zeige:

(1) $Z(G) \trianglelefteq G$.

(2) $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$.

(3) $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element e_G, X eine Menge und $Y \subset X$. Definiere $G^X := \{f : X \to G\}$, die Menge der G-wertigen Funktionen auf X. Sei weiterhin $N(Y) := \{f \in G^X \mid \forall y \in Y : f(y) = e_G\}$. Zeige:

(1) G^X ist bezüglich der Verknüpfung $(f_1 \circ f_2)(x) := f_1(x) f_2(x), x \in X$ eine Gruppe.

(2) $N(Y) \trianglelefteq G^X$.

(3) $G^X / N(Y) \cong G^Y$.

Die Abgabe erfolgt bis **Donnerstag**, den **13.11.2014**, während der Übung. Gutes Gelingen!