Prof. Dr. Martin Henk
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 4-1

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenzettel 4

Aufgabe 1 (10 Punkte). Es sei G eine Gruppe. Nimm an, dass $|G| = 56$. Zeige, dass G eine nicht-triviale Sylowgruppe N besitzt, so dass $N \trianglelefteq G$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei p eine Primzahl und $G := \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ die Gruppe der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen über $\mathbb{F}_p$. Zeige: Die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen, deren Diagonaleinträge gleich 1 sind, ist eine p-Sylow Untergruppe in G.
Hinweis: Die Ordnung von G wurde bereits in der Vorlesung berechnet.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Es sei wieder p eine Primzahl. Sei weiterhin

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p) := \left\{ g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p) \,\middle|\, \det g = ad - bc = 1 \right\}.$$

(1) Zeige, dass $|\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)| = p^3 - p$.
Hinweis: $\det : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p^\times$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(2) Zeige, dass S_4 keinen Normalteiler der Ordnung 2 enthält.

(3) Sei nun $p = 3$. Zeige, dass $|S_4| = |\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_3)|$, die beiden Gruppen jedoch nicht isomorph sind.
Hinweis: Verwende Aufgabe 1.3 von Zettel 3 und Punkt (2).

Aufgabe 4 (10 Punkte). Zeige: A_4 hat keine Untergruppe von Ordnung 6.

Die Abgabe erfolgt bis **Donnerstag**, den **20.11.2014**, während der Übung. Gutes Gelingen!