Prof. Dr. Martin Henk
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 4-1

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenzettel 5

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei p eine Primzahl und G eine endliche Gruppe. Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}_p(G)$ die Menge der p-Sylow Untergruppen von G. Zeige, dass für alle $H \in \mathcal{S}_p(G)$ die Gleichung $|\mathcal{S}_p(G)| = (G : N_G(H))$ erfüllt ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei p eine Primzahl. Bestimme die Anzahl der p-Sylow Untergruppen von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$.

Hinweis: Zeige, dass die Gruppe aus Aufgabe 2 von Zettel 4 eine p-Sylow Untergruppe von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$ ist und bestimme Ihren Normalisator. Siehe auch Aufgabe 3.1 auf Zettel 4.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Die Diedergruppe D_n wurde in der Vorlesung als Symmetriegruppe des regelmäßigen n-Ecks vorgestellt. In dieser Aufgabe geht es darum, alternative Beschreibungen der Diedergruppe zu bestimmen.

(1) Finde eine natürliche Zahl m und Elemente $s, d \in S_m$, so dass $D_n \cong \langle s, d \rangle$.

(2) Betrachte die Menge $U_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ der n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Zeige, dass U_n eine Gruppe unter Multiplikation ist. Finde bijektive Abbildungen $s, d : U_n \to U_n$, so dass $D_n \cong \langle s, d \rangle$.

Hinweis: Man stelle sich die n-ten Einheitswurzeln als Ecken eines regelmäßigen n-Ecks in der Gaußschen Ebene vor.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element e_G und X eine Menge, sowie $Y \subset X$. Wie auf Aufgabenzettel 3 sei $G^X := \{f : X \to G\}$ die Gruppe der G-wertigen Funktionen auf X und $N(Y) = \{f \in G^X \mid \forall y \in Y : f(y) = e_G\}$. Zeige, dass G^X das interne direkte Produkt von $N(Y)$ und $N(X \backslash Y)$ ist.

Die Abgabe erfolgt bis **Donnerstag**, den **27.11.2014**, während der Übung. Gutes Gelingen!