Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 4-1

Paul Breiding

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Lösung zu Aufgabe 4, Zettel 6

Bemerkung zur alten Aufgabenstellung: In der alten Version des Übungsblattes war folgendes zu zeigen: Seien G, H Gruppen, sowie $\theta : H \to \operatorname{Aut}(G)$. Dann: $G \rtimes_\theta H \cong G \times H \iff \forall h \in H : \theta(h) = \mathrm{id}$.

Diese Aussage ist falsch wie das folgende Gegenbeispiel illustriert:

Sei $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}), H = \mathbb{C}^\times$. Seien $A \in SL(n, \mathbb{C})$ und $h \in \mathbb{C}^\times$. Wir definieren:

$$\theta_1(h)A := \operatorname{diag}(\sqrt[n]{h})A \operatorname{diag}(\sqrt[n]{h})^{-1} = \mathrm{id}\, A, \tag{0.1}$$

$$\theta_2(h)A := \operatorname{diag}(h, 1, \ldots, 1)A \operatorname{diag}(h, 1, \ldots, 1)^{-1}, \tag{0.2}$$

Wir erhalten jeweils $G \rtimes_{\theta_i} H \cong GL(n, \mathbb{C})$, $i = 1, 2$. Jedoch ist $G \rtimes_{\theta_1} H \cong G \times H$, aber im Allgemeinen aber $\theta_2(h) \neq \mathrm{id}$.

Wir können die Aufgabe reparieren, indem wir fordern, dass der Isomorphismus $\Psi : G \times H \to G \rtimes_\theta H$, folgende Bedinungen erfüllt:

$$\forall g \in G, h \in H : \Psi(g, h) = (g, h).$$

In obigem Beispiel erfüllt $H = \{\operatorname{diag}(h, 1, \ldots, 1) \mid h \in \mathbb{C}^\times\}$ die Forderung nicht.

Aufgabe 4 Es seien G, H Gruppen un $\theta : H \to \operatorname{Aut}(G)$. Zeige:

(1) Es existiert ein Isomorphismus $\Psi : G \times H \to G \rtimes_\theta H$, welcher $\Psi(g, h) = (g, h)$, $g \in G, h \in H$ erfüllt $\iff \forall h \in H : \theta(h) = \mathrm{id}$.

(2) $G \rtimes_\theta H$ ist auflösbar $\iff$ G und H sind auflösbar.

Lösung. Zu (1): Falls für alle $h \in H$ gilt: $\theta(h) = \mathrm{id}$, so ist $\Psi : G \to N \times H, (n, h) \mapsto (n, h)$ ein Isomorphismus. Für die andere Richtung betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & G \rtimes_\theta H & \\
G \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\widetilde{\alpha}"'] & & H \arrow[ul, "\gamma"'] \arrow[dl, "\widetilde{\gamma}"] \\
 & G \times_\theta H \arrow[uu, "\Psi"] &
\end{tikzcd}$$

wobei $\alpha(g) = (g, 1)$, $\widetilde{\alpha}(g) = (g, 1)$, $\gamma(h) = (1, h)$, $\widetilde{\gamma}(h) = (1, h)$ injektive Gruppenhomomorphismen sind. Nach Voraussetzung erfüllt Ψ die Eigenschaft, dass

$$\alpha = \Psi \circ \widetilde{\alpha} \text{ und} \tag{0.3}$$
$$\gamma = \Psi \circ \widetilde{\gamma}. \tag{0.4}$$

Weiterhin gelten folgende Gleichungen:

$$\forall g \in G, h \in H: \quad \gamma(h)\alpha(g)\gamma(h)^{-1} = (\alpha \circ \theta(h))(g) \tag{0.5}$$
$$\widetilde{\gamma}(h)\widetilde{\alpha}(g)\widetilde{\gamma}(h)^{-1} = \alpha(g) \tag{0.6}$$

Setzen wir in (0.6) die Gleichungen (0.3) und (0.4) ein, so erhalten wir

$$\forall g \in G, h \in H : \alpha(g) = (\alpha \circ \theta(h))(g).$$

Da α injektiv ist, muss $\theta(h) = \mathrm{id}$ sein.

Zu (2): Seien G und H auflösbar und $\{e\} = G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_r = G$ sowie $\{e'\} = H_1 \trianglelefteq H_2 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_s = H$ Normalreihen mit abelschen Faktoren. Definiere nun W_i, $1 \leq i \leq r + s$ via

$$W_i := \begin{cases} G_i \rtimes_\theta \{e'\} & 1 \leq i \leq r \\ G \rtimes H_{i-r} & r + 1 \leq i \leq s + r. \end{cases}.$$

Man prüft, dass alle W_i wohldefinierten Untergruppen von $G \rtimes_\theta H$ sind und dass $W_i \trianglelefteq W_{i+1}$, $1 \leq i < r + s$. Weiterhin gilt

$$W_i / W_{i+1} \cong \begin{cases} G_i / G_{i+1} & 1 \leq i \leq r \\ H_i / H_{i+1} & r \leq i \leq s + r. \end{cases},$$

d.h. die Faktoren sind abelsch.
Sei nun $G \rtimes_\theta H$ auflösbar. Sei $\{(e, e')\} \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_t = G \rtimes_\theta H$ eine Normalreihe mit abelschen Faktoren. Sei $\pi_H : G \rtimes_\theta H \to H, (g, h) \mapsto h$. Man prüft, dass π_H ein Gruppenhomomorphismus ist. Definiere nun

$$H_i := \pi_H(K_i).$$

Offenbar ist $\pi_H|_{K_i}$ surjektiv, also gilt $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$. Sei $p : H_i \to H_i / H_{i-1}$ die kanonische Projektion. Dann gilt $\ker(p \circ \pi_H) = \{(g, h) \in K_i \mid h \in H_{i-1}\} = K_{i-1}$, also $K/K_{i-1} \cong H_i / H_{i-1}$, d.h. H_i / H_{i-1} ist abelsch. Sei weiterhin:

$$L_i := \{(g, e') \in K_i\}.$$

Wegen $(g,h)(g',e')(g,h)^{-1} = (\widetilde{g},e')$ (für ein gewisses $\widetilde{g}$) ist $L_{i-1} \trianglelefteq L_i$ und sogar $L_{i-1} \trianglelefteq K_i$ Sei nun $\pi_G : L_i \to G, (g,1) \mapsto g$. Dann ist π_G ein Gruppenhomomorphismus. Wir setzen

$$G_i := \pi_G(L_i).$$

■

Wie zuvor erhalten wir, dass $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$, $1 \leq i \leq t$ und dass $G_i/G_{i-1} \cong L_i/L_{i-1}$. Wir können L_i/L_{i-1} in natürlicher Weise als Untergruppe von K_i/L_{i-1} auffassen. Dies zeigt, dass G_i/G_{i-1} abelsch ist.