Prof. Dr. Martin Henk
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 4-1

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenzettel 6

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei $n \geq 3$. Zeige, dass A_n von den 3-er Zyklen erzeugt wird.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige, dass $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ ein semidirektes Produkt von $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ und $\mathbb{K}^\times$ ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $I \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist die Einheitsmatrix. Sei weiterhin $\mathcal{O}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \mid AA^T = I\}$, die Gruppe der reellen orthogonalen Matrizen. Für $A \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Abbildung $\varphi_{A,c} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto Ax + b$. Außerdem definieren wir die folgenden Gruppen

$$\begin{aligned} M &:= \{\varphi_{A,c} \mid A \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n\}, \\ O &:= \{\varphi_{A,0} \mid A \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})\}, \\ T &:= \{\varphi_{I,c} \mid c \in \mathbb{R}^n\}. \end{aligned}$$

Die Verknüpfung ist hier jeweils Hintereinanderausführung

(1) Zeige, dass $T \trianglelefteq M$.
(2) Finde $\theta : O \mapsto \mathrm{Aut}(T)$, sodass $M = T \rtimes_\theta O$.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Es seien G, H Gruppen und $\theta : H \to \mathrm{Aut}(G)$. Zeige:

(1) Es existiert ein Isomorphismus $\Psi : G \times H \to G \rtimes_\theta H$, welcher $\Psi(g, h) = (g, h)$, $g \in G, h \in H$ erfüllt $\iff \forall h \in H : \theta(h) = \mathrm{id}$.
(2) $G \rtimes_\theta H$ ist auflösbar $\iff$ G und H sind auflösbar.