Prof. Dr. Martin Henk
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 4-1

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenzettel 7

Aufgabe 1. Sei G ein Gruppe und $H \trianglelefteq G$. Zeige, dass G genau dann auflösbar ist, wenn sowohl H als auch G/H auflösbar sind.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe. Die *Kommutatorgruppe* von G ist definiert als

$$[G, G] := \langle \{ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G\} \rangle.$$

Wir definieren außerdem rekursiv $D^0G := G$ und $D^iG := [D^{i-1}G, D^{i-1}G]$, $i \geq 1$. Zeige:

(1) $[G, G] \trianglelefteq G$.

(2) $G/[G, G]$ ist abelsch.

(3) Sei $N \trianglelefteq G$, so dass G/N abelsch ist. Dann ist $[G, G] \leq N$.

(4) G ist genau dann auflösbar, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $D^nG = \{e_G\}$.

Bemerkung: Falls G auflösbar ist, ist die Reihe D^iG die gröbste aller Normalreihen mit abelschen Faktoren.

Aufgabe 3. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige: R ist genau dann ein Körper, falls $\{0\}$ und R die einzigen Ideale in R sind.

Bemerkung: Wenn wir den Ring R hier nicht als kommutativ voraussetzen und fordern, dass R außer $\{0\}$ und R keine Links- oder Rechtsideale haben soll, kommen wir auf den Begriff des *Schiefkörpers*.

Aufgabe 4. Es sei $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. wir definieren $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] := \{a + b\sqrt{-d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ als Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Zeige:

(1) $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$.

(2) $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]^\times = \{a + b\sqrt{-d} \mid a^2 + b^2 d = 1\}$.

Die Abgabe erfolgt bis **Donnerstag**, den **11.12.2014**, während der Übung. Gutes Gelingen!