Prof. Dr. Martin Henk
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 4-1

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenzettel 9

Aufgabe 1 (10 Punkte). Finde alle $x \in \mathbb{Z}$, welche jeweils die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) $x \equiv 2 \bmod 7$, $x \equiv 6 \bmod 13$, $x \equiv 1 \bmod 3$.

(2) $x \equiv 4 \bmod 5$, $x \equiv 1 \bmod 7$, $x \equiv 1 \bmod 52$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring, in welchem gilt:

$$\forall x \in R : \exists n \in \mathbb{N}_{>1} : x^n = x.$$

Zeige, dass jedes Primideal in R maximal ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring. Der Ring R heißt *lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal enthält. Zeige:

(1) R ist lokal $\Longleftrightarrow R \backslash R^\times$ ist ein Ideal in R.

(2) Sei R lokal und $I \subsetneq R$ ein Ideal. Dann ist R/I lokal.

(3) Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Für $x \in \mathbb{Z}$ sei $v_p(x) := \max \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; p^k \text{ teilt } x \right\}$ wobei dies per Konvention $v_p(0) = \infty$ bedeutet. Dann ist

$$R_p := \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; v_p(x) \geq v_p(y) \right\} \subseteq \mathbb{Q}$$

ein lokaler Ring. Es muss nicht nachgeprüft werden, dass R_p ein Ring ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei $\zeta := \sqrt{-2}$ und $R := \mathbb{Z}[\zeta] = \{a + b\zeta \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeige:

(1) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ existieren $q \in R$ und $w \in \mathbb{C}$, so dass $z = q + w$ und $|w| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

(2) Der Ring R ist ein euklidischer Ring bezüglich der Abbildung

$$\delta : R \backslash \{0\} \to \mathbb{N}, r \mapsto |r|^2.$$

Hinweis: Verwende (1).

(3) Folgere, dass R ein Hauptidealring ist.

(4) $5 \cdot R$ ist ein maximales Ideal, $11 \cdot R$ jedoch nicht.

Hinweis: Verwende die Tatsache, dass die Norm von $\mathbb{C}$ multiplikativ ist.

(5) Das Ideal $(3, 1 + \sqrt{-5}) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist kein Hauptideal.

Hinweis: Verwende wieder die Norm in $\mathbb{C}$.

Die Abgabe erfolgt bis **Donnerstag**, den **08.01.2014**, während der Übung. Gutes Gelingen!