Prof. Dr. Martin Henk
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 4-1

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenzettel 10

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper.

(1) Zeige, dass es eine Primzahl p gibt und ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|\mathbb{K}| = p^n$.

(2) Zeige, dass es keinen Integritätsring mit 10 Elementen gibt.

Im Folgenden seien A, B kommutative Ringe und $\Phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

Aufgabe 2 (10 Punkte).

(1) Es sei $x \in A$ irreduzibel. Welche Eigenschaft muss Φ haben, damit $\Phi(x)$ irreduzibel in B ist?

(2) Zeige, dass für ein Ideal $J \subseteq B$ auch das Urbild $\Phi^{-1}(J)$ ein Ideal von A ist.

(3) Welche Eigenschaft muss Φ haben, damit für ein Ideal $I \subseteq A$ auch $\Phi(I)$ ein Ideal von B ist?

Aufgabe 3 (10 Punkte). Zeige:

(1) Wenn $P \subseteq B$ ein Primideal ist, dann ist $\Phi^{-1}(P)$ ein Primideal von A.

(2) Falls $M \subseteq B$ ein maximales Ideal ist, dann ist $\Phi^{-1}(M)$ nicht notwendigerweise ein maximales Ideal von A. (Gib ein Gegenbeispiel an.)

Aufgabe 4 (10 Punkte). Zeige:

(1) Falls A ein Körper ist und $B \neq \{0\}$, so ist Φ injektiv.

(2) Falls A und B Körper sind und Φ nicht die Nullfunktion ist, so muss gelten: $\mathrm{char}(A) = \mathrm{char}(B)$.

Die Abgabe erfolgt bis **Donnerstag**, den **15.01.2014**, während der Übung. Gutes Gelingen!