Prof. Dr. Martin Henk
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 4-1

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenzettel 11

Aufgabe 1 (10 Punkte). Es sei $\mathbb{K} := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $f \in \mathbb{K}[X]$ und $R := \mathbb{K}[X]/(f)$. Weiterhin sei $\pi : \mathbb{K}[X] \to R$ die kanonische Projektion und $x := \pi(X)$.

(1) Sei $f := X^5 + X^2 + 1$. Zeige, dass $x + x^2 + x^4 \in R^\times$ und berechne das Inverse.

(2) Sei $f := X^4 + X^3 + 1$. Zeige, dass $x + 1 \in R^\times$ und berechne das Inverse.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Zeige mit Hilfe des Eisensteinschen Irreduzibilitätskriteriums, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind.

(1) $X^7 - 6X^5 + 9X^2 + 12X - 15 \in \mathbb{Z}[X]$.

(2) $Y^3 + XY^2 + X^2Y + X^2 + X \in \mathbb{Q}[X, Y]$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei $n \geq 1$. Wir nehmen an, dass $\sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist. Zeige, dass dann auch $\sum_{i=0}^n a_{n-i} X^i \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist. Folgere außerdem, dass $6X^5 - 9X^3 + 12X^2 - 4 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte). In dieser Aufgabe soll das Konzept des Quotientenkörpers verallgemeinert werden. Sei A ein kommutativer Integritätsring und $S \subseteq A \backslash \{0\}$ mit $1 \in S$ sowie $ab \in S$ für $a, b \in S$. (Eine solche Menge nennt man *multiplikativ*.) Sei weiterhin folgende Äquivalenzrelation auf $A \times S$ gegeben:

$$(a, s) \sim (a', s') :\Leftrightarrow as' = a's.$$

Sei $(a, s) \in A \times S$. Dann schreiben wir $\frac{a}{s}$ für die Äquivalenzklasse von (a, s) und setzen $S^{-1}A := (A \times S)/\sim$.

(1) Zeige, dass $S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, a \in A, s \in S \right\}$ eine wohldefinierte Ringstruktur aufweist.

(2) Sei $\mathbb{K}$ der Quotientenkörper von A. Zeige, dass $S^{-1}A$ ein Unterring von $\mathbb{K}$ ist, welcher A enthält.

(3) Gib ein S an, so dass $\mathbb{K} = S^{-1}A$.

(4) Sei $a \in A$ und $S := \left\{ a^k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$. Zeige, dass $S^{-1}A \cong A[X]/(aX - 1)$.

Die Abgabe erfolgt bis **Donnerstag**, den **22.01.2014**, während der Übung. Gutes Gelingen!