Prof. Dr. Martin Henk
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 4-1

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenzettel 12

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring. Drücke das symmetrische Polynom $\Delta := (X_1 - X_2)^2(X_1 - X_3)^2(X_2 - X_3)^2 \in R[X_1, X_2, X_3]$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ aus.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring und $f, g, h \in R[X] \setminus R$ seien normierte Polynome. Zeige:

(1) $\operatorname{res}(fg, h) = \operatorname{res}(f, h) \cdot \operatorname{res}(g, h)$.

(2) $\operatorname{disc}(fg) = \operatorname{disc}(f) \cdot \operatorname{disc}(g) \cdot \operatorname{res}(f, g)^2$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein normiertes kubisches Polynom. Zeige, dass f genau dann drei verschiedene, reelle Nullstellen hat, wenn $\operatorname{disc}(f) > 0$.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Es seien X_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, Unbestimmte über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $R := \mathbb{K}[X_{ij} | 1 \leq i, j \leq n]$. Wir bezeichnen mit $\det_n \in R$ die Determinante der Matrix (X_{ij}). Zeige, dass $\det_n$ irreduzibel ist.
Hinweis: Führe Induktion nach n. Fasse im Induktionsschritt $\det_n$ als Polynom in X_{nn} auf. Bestimme den Grad von $\det_n$ in X_{nn} und zeige mittels Induktionsvoraussetzung, dass dieses Polynom primitiv ist.

Die Abgabe erfolgt bis **Donnerstag**, den **29.01.2014**, während der Übung. Gutes Gelingen!