Prof. Dr. Martin Henk
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 4-1

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Aufgabenzettel 13

Aufgabe 1 (10 Punkte). Betrachte den Körper $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Bestimme den Grad der Erweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ und bestimme eine Basis von $\mathbb{K}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Körpererweiterung. Man zeige:

(1) Für $a \in \mathbb{L}$ ist das Minimalpolynom von a über $\mathbb{K}$ gleich dem Minimalpolynom der $\mathbb{K}$-linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_a \colon \mathbb{L} &\longrightarrow \mathbb{L} \\ x &\longmapsto a \cdot x. \end{aligned}$$

(2) Wenn $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$, so ist das Minimalpolynom von a über $\mathbb{K}$ bereits gleich dem *charakteristischen* Polynom von ϕ_a.

Hinweis: Es wird der Satz von Cayley-Hamilton aus der linearen Algebra als bekannt vorausgesetzt. Dieser besagt (zur Erinnerung): Für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum V und eine lineare Abbildung $\phi \in \operatorname{End}(V)$ mit charakteristischem Polynom $\chi \in \mathbb{K}[X]$ gilt $\chi(\phi) = 0 \in \operatorname{End}(V)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Betrachte erneut den Körper $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, wie in Aufgabe 1. Verwende nun Aufgabe 2, um das Minimalpolynom von $a := \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{K}$ über $\mathbb{Q}$ zu bestimmen.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Zeige, dass eine Körpererweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ genau dann algebraisch ist, wenn jeder Unterring R von $\mathbb{L}$ mit $\mathbb{K} \subseteq R \subseteq \mathbb{L}$ ein Körper ist.