Prof. Peter Bürgisser
Dr. Pierre Lairez
Paul Breiding

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Algebra I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 1

Aufgabe 1 (8 Punkte). Zeige, dass jede Untergruppe H von $(\mathbb{Z}, +)$ zyklisch ist.
Erinnerung: Eine Gruppe H heißt zyklisch, wenn sie von einem Element erzeugt wird.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Es sei S_4 die symmetrische Gruppe auf $\{1,2,3,4\}$. Definiere $M := \{g \in S_4 \mid g^2 = \mathrm{id}, \forall x \in \{1,2,3,4\} : g(x) \neq x\}$ und setze $H := \langle M \rangle$, d.h. H ist die von M erzeugte Untergruppe von S_4.

(1) Zeige, dass $|H| = 4$.

(2) Zeige, dass H abelsch ist.

Im Folgenden sei stets G eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$.

Aufgabe 3 (8 Punkte). Sei G endlich. Zeige:

(1) Für jedes $g \in G$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $g^n = e$.

(2) Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $g \in G$ gilt, dass $g^m = e$.

Aufgabe 4 (8 Punkte). Seien $H, K \leq G$ zwei Untergruppen von G. Zeige, dass $H \cup K$ genau dann eine Gruppe ist, wenn $H \leq K$ oder $K \leq H$.

Aufgabe 5 (8 Punkte). Angenommen für alle $g \in G$ gilt $g^2 = e$. Zeige, dass G abelsch ist.

Aufgabe 6 (8 Punkte). Sei G abelsch. Definiere $S := \{g \in G \mid \exists n \in \mathbb{N} : g^n = e\}$, die Menge aller Elemente mit endlicher Ordnung in G. Zeige, dass S eine Gruppe ist.

Abgabe **Dienstag**, den **20.10.2015**, in der Vorlesung.